Федеральное агентство по образованию

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
Санкт-Петербургский государственный технологический институт
(Технический Университет)

Кафедра прикладной математики

**М.В.Лукина, Е.В.Милованович**

# ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ.

# СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ

**Учебное пособие**

Санкт-Петербург

2007

УДК 519.6

Лукина М.В., Милованович Е.В. Примеры решению задач по теории вероятностей. Случайные события: учебное пособие./ — СПб., СПбГТИ(ТУ), 2007. — 56 с.

Учебное пособие включает традиционные разделы «Теории вероятностей», изучаемые студентами всех специальностей на кафедре прикладной математики. В первую очередь оно может быть использовано как самостоятельное учебное пособие (самоучитель) по этим разделам. Оно должно помочь обучающимся разобраться в решении типовых задач, самостоятельно научиться решать задачи начального и среднего уровня сложности, а также проверить усвоение полученных навыков. Преподаватели могут использовать учебное пособие как задачник по данной теме и как сборник дидактических материалов.

Учебное пособие предназначено для студентов второго курса всех специальностей и соответствует рабочей программе по учебной дисциплине «Прикладная математика».

Табл.2, библиогр. 6 назв.

Рецензент:
1. Университет информационных технологий, механики и оптики. Доцент кафедры высшей математики, канд.физ.-мат. наук Лапин И.А.
2. Капитонов В.С., канд.физ.-мат. наук, доцент кафедры высшей математики СПбГТИ(ТУ)

Утверждены на заседании учебно-методической комиссии физико-математического отделения 07.11.07

Рекомендовано к изданию РИСо СПбГТИ(ТУ)

# ВВЕДЕНИЕ

В последнее время образовательный процесс в вузах ориентирован на активное, управляемое самообучение каждого студента. Такой путь предполагает методическое обеспечение учебного процесса литературой для разнообразных форм самостоятельной работы.

Предлагаемое учебное пособие включает традиционные разделы «Теории вероятностей», изучаемые студентами всех специальностей на кафедре прикладной математики. По замыслу авторов, оно должно помочь обучающимся разобраться в решении типовых задач, самостоятельно научиться решать задачи начального и среднего уровня сложности, а также проверить усвоение полученных навыков.

Методическое указание имеет следующую структуру:

*РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ* (РЗ) содержит задачи по рассматриваемой теме с их полным решением и пояснением рассуждений и хода решения.

*ТРЕНИРОВОЧНАЯ РАБОТА* (ТР) предлагает ряд задач для самостоятельного решения. В процессе ее решения студент должен понять, что он усвоил и при необходимости вернуться к практикуму. В конце тренировочной работы предложено ее решение без дополнительных пояснений.

*ПРОВЕРОЧНАЯ РАБОТА* предназначена для закрепления полученных навыков решения задач и содержит только ответы для сравнения.

В конце приведено несколько вариантов контрольной работы с ответами.

В тексте методического указания встречаются ссылки на практикумы и тренировочные работы (Например: см. РЗ2, см. ТР1–2,3).

Преподаватели могут использовать учебное пособие как задачник по данной теме и как сборник дидактических материалов.

# 1 НЕПОСРЕДСТВЕННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ СОБЫТИЯ

С каждым случайным событием $A$ связан случайный эксперимент (опыт). Каждый результат такого эксперимента представляет собой элементарный исход $\omega_i$. Совокупность всех элементарных исходов образует пространство элементарных исходов $\Omega = \{\omega_i\}$. Случайное событие $A$ является подмножеством этого пространства $A \subset \Omega$. Все исходы, входящие в это подмножество являются исходами, благоприятствующими событию $A$.

Согласно ***классическому определению***, вероятность события $A$ равна отношению числа исходов, благоприятствующих событию $A$ к общему числу исходов:

$$\mathbf{P}(A) = \frac{n_A}{n},$$

где $n_A$ — число исходов, благоприятствующих событию $A$;

$n$ — общее число исходов.

Предполагается, что все исходы равновозможные.

### *РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ 1*

***Задача 1.*** Вычислить вероятность выпадения герба при однократном подбрасывании монеты.

Случайный эксперимент (СЭ) состоит в однократном подбрасывании монеты. В результате этого эксперимента может появиться «герб» или «цифра», значит пространство элементарных исходов $\Omega = \{\text{Г}, \text{Ц}\}$, $n = 2$. Событие $A$ — выпадение герба, $A = \{\text{Г}\}$, $n_A = 1$. Тогда $\mathbf{P}(A) = \frac{n_A}{n} = \frac{1}{2}$.

***Задача 2.*** Вычислить вероятность выпадения одного герба при двукратном подбрасывании монеты.

СЭ — двукратное подбрасывание монеты. Количество исходов такого эксперимента уже больше, перечислим их $\Omega = \{\text{ГГ}, \text{ГЦ}, \text{ЦГ}, \text{ЦЦ}\}$, $n = 4$. Событие $A$ — выпадение одного герба, $A = \{\text{ГЦ}, \text{ЦГ}\}$, $n_A = 2$. Получаем $\mathbf{P}(A) = \frac{n_A}{n} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

Отметим, что с точки зрения вероятности, не важно бросается ли одна монета два раза или две монеты бросают один раз. Если монеты различимы число исходов и в том и в другом случае будет одинаково, а значит и вероятность будет одна и та же.

***Задача 3.*** Игральный кубик подбрасывают один раз. Найти вероятность того, что:

а) выпадет цифра $2$;

б) выпадет четное число очков;

в) выпадет число очков кратное трем.

СЭ — подбрасывание игрального кубика. $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$, $n = 6$.

Событие $A$ — выпадение цифры $2$, $A = \{2\}$, $n_A = 1$. Тогда $\mathbf{P}(A) = \frac{n_A}{n} = \frac{1}{6}$.

Событие $B$ — выпадение четного числа очков, $B = \{2,4,6\}$, $n_B = 3$. Получим $\mathbf{P}(B) = \frac{n_B}{n} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. Отметим, что в этом случае, пространство элементарных исходов можно записать в другом виде $\Omega = \{\text{чет.}, \text{нечет.}\}$, $n = 2$, $B = \{\text{чет.}\}$, $n_B = 1$ и $\mathbf{P}(B) = \frac{n_B}{n} = \frac{1}{2}$.

Событие $C$ — выпадение числа очков кратного $3$, $C = \{3,6\}$, $n_C = 2$. $\mathbf{P}(C) = \frac{n_C}{n} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. В отличие от предыдущего случая, пространство элементарных исходов вида $\Omega = \{\text{кр.3}, \text{не кр.3}\}$ не может быть использовано для решения задачи, т.к. элементарные исходы не будут равновозможными.

Из рассмотренных задач видно, что нет необходимости каждый раз выписывать всё пространство элементарных исходов, поскольку нас интересует лишь количество исходов.

***Задача 4.*** В ящике находится 5 белых и 7 черных шаров. Наудачу извлекают один шар. Какова вероятность того, что он белый?

Любой шар имеет шанс быть извлеченным, значит, пространство элементарных исходов состоит из всех шаров, находящихся в ящике, $n = 5 + 7 = 12$. Исход будет благоприятным для события $A$, если извлеченный шар окажется белым, значит, каждый белый шар является благоприятным исходом, $n_A = 5$. Тогда $\mathbf{P}(A) = \frac{n_A}{n} = \frac{5}{12}$.

***Задача 5.*** В ящике находится 6 белых и 8 черных шаров. Наудачу один за другим извлекают все шары. Какова вероятность того, что последний извлеченный шар окажется белым?

Каждый шар в ящике может оказаться в роли последнего, значит, $n = 6 + 8 = 14$. Исход будет благоприятствующим событию $A$, если этот последний шар окажется белым и таких возможностей $n_A = 6$, поэтому $\mathbf{P}(A) = \frac{n_A}{n} = \frac{6}{14} = \frac{3}{7}$.

С точки зрения вероятности не важно, о каком шаре, первом, втором, третьем, …, последнем идет речь. Вероятность каждый раз будет одна и та же.

***Задача 6.*** В урне содержится *2* белых и *2* черных шара. Вынимаются наудачу два шара. Найти вероятность того, что:

а) оба шара белые;

б) хотя бы один черный.

СЭ — извлечение двух шаров из четырех имеющихся. Посчитаем количество исходов такого эксперимента.

$\Omega = \{Б_1Б_2, Б_1Ч_1, Б_1Ч_2, Б_2Б_1, Б_2Ч_1, Б_2Ч_2, Ч_1Б_1, Ч_1Б_2, Ч_1Ч_2, Ч_2Б_1, Ч_2Б_2, Ч_2Ч_1\}$, $n = 12$.

Событие $A$ — оба шара белые, $A = \{Б_1Б_2, Б_2Б_1\}$, $n_A = 2$. Тогда $\mathbf{P}(A) = \frac{n_A}{n} = \frac{1}{6}$.

Событие $B$ — хотя бы один черный, $B = \{Б_1Ч_1, Б_1Ч_2, Б_2Ч_1, Б_2Ч_2, Ч_1Б_1, Ч_1Б_2, Ч_1Ч_2, Ч_2Б_1, Ч_2Б_2, Ч_2Ч_1\}$, $n_B = 10$. Получим $\mathbf{P}(B) = \frac{n_B}{n} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$.

***Задача 7.*** Игральный кубик подбрасывают два раза. Найти вероятности следующих событий:

а) сумма выпавших очков равна 5;

б) сумма выпавших очков равна 5, а произведение 6;

в) сумма выпавших очков равна 5, если произведение 6.

Сосчитаем общее число исходов при двукратном подбрасывании игрального кубика: если в первый раз выпала *1*, то во второй раз может появиться любая из шести цифр *1*, *2*, *3*, *4*, *5*, *6* и это дает *6* различных исходов. Если в первый раз выпала *2*, то во второй раз опять может появиться любая из шести цифр и получается еще *6* исходов. Рассуждая так же далее, получим всего $n = 6 \cdot 6 = 36$ исходов. Отметим, что в пространство элементарных исходов вошли пары вида $(1,1), (2,2)\ldots$, каждая один раз, а вместе с парой вида $(1,2)$ обязательно присутствует пара $(2,1)$. Это необходимо для того, чтобы все исходы были равновозможными.

Исходы, благоприятствующие событию $A$ — сумма выпавших очков равна $5$, $A=\{(1,4),(4,1),(2,3),(3,2)\}$, $n_A=4$. Тогда $\mathbf{P}(A)=\frac{n_A}{n}=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$.

Событие $B$ — сумма выпавших очков равна $5$, а произведение $6$, $B=\{(2,3),(3,2)\}$, $n_B=2$. Получим $\mathbf{P}(B)=\frac{n_B}{n}=\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$.

Рассмотрим событие $C$ — сумма выпавших очков равна $5$, если произведение $6$. Из формулировки события следует, что заведомо известно, что произведение выпавших очков равно $6$. Задачу можно переформулировать: «При двукратном подбрасывании игрального кубика выпали цифры, произведение которых равно $6$. Найти вероятности того, что сумма выпавших очков равна $5$». Значит, это надо учесть при подсчете общего числа исходов. Имеем $\Omega=\{(1,6),(6,1),(2,3),(3,2)\}$, $n=4$. Событие $C=\{(2,3),(3,2)\}$, $n_C=2$. Получим $\mathbf{P}(C)=\frac{n_C}{n}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$.

***Задача 8.*** Из колоды $36$ карт берут одну карту. После извлечения карту возвращают, а колоду перемешивают. Определить вероятность того, что вторая извлеченная карта имеет ту же масть, что и первая.

Извлечение первой карты необходимо лишь для того, чтобы задать масть второй карты. Поэтому рассматриваемые исходы будут относиться лишь ко второй карте. Каждая карта в колоде может быть взята при втором извлечении. Значит $n=36$. Количество карт той масти, которая появилась при первом извлечении (любой масти) определяет число благоприятных исходов, $n_A=9$. Значит $\mathbf{P}(A)=\frac{n_A}{n}=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$.

***Задача 9.*** Из двух взятых наудачу костей домино одна переворачивается. Определить вероятность того, что вторая кость дубль, если первая не дубль.

Сколько возможностей при извлечении второй кости? Только $27$ $(n=27)$, ведь первая кость после извлечения не возвращается обратно. Количество благоприятных исходов совпадает с числом дублей в наборе, ведь первая кость определенно не дубль, $n_A=7$. Поэтому $\mathbf{P}(A)=\frac{n_A}{n}=\frac{7}{27}$.

***Задача 10.*** Определить вероятность того, что взятое наудачу двузначное число делится на четыре.

Общее число исходов совпадает с количеством двузначных чисел $n=90$. Посчитаем количество чисел кратных четырем: первое из них равно $12$ $(a_1=12)$, каждое следующее получим прибавлением $4$ $(d=4)$, последнее двузначное кратное четырем равно $96$ $(a_k=96)$. Имеем арифметическую прогрессию. Найдем номер последнего числа, или что то же самое количество двузначных чисел кратных четырем (количество благоприятных исходов): $a_k=a_1+d(k-1)$. В нашем случае $96=12+4(k-1)$. Тогда $k=22$. Значит $n_A=22$, а $\mathbf{P}(A)=\frac{n_A}{n}=\frac{22}{90}=\frac{11}{45}$.

## *ТРЕНИРОВОЧНАЯ РАБОТА 1*

Попробуйте решить самостоятельно следующие задачи.

***Задача 1.*** На карточке спортлото написаны числа от 1 до 49. Какова вероятность того, что наугад зачеркнутое число на этой карточке кратно 6?

***Задача 2.*** Выбирают наугад число от 1 до 100. Определить вероятность того, что в этом числе не окажется цифры 3.

***Задача 3.*** В кармане 3 пятикопеечные монеты и 7 десятикопеечных монет. Наугад берется одна за другой две монеты. Вторая оказалась десятикопеечной. Определить вероятность того, что и первая десятикопеечная.

***Задача 4.*** Определить вероятность того, что квадрат наудачу взятого двузначного числа оканчивается единицей.

***Задача 5.*** На десяти одинаковых карточках написаны различные цифры от 0 до 9. Определить вероятность того, что образованное с помощью данных карточек двузначное число делится на *5*.

***Задача 6.*** Подбрасывают три монеты. Найти вероятность того, что:

а) герб появится один раз;

б) герб появится не менее одного раза;

в) герб появится более одного раза.

***Задача 7.*** Брошены две игральные кости. Найти вероятность того, что:

а) сумма выпавших очков не превосходит семи;

б) на обеих костях выпадет одинаковое число очков;

в) произведение выпавших очков делится на 4;

г) хотя бы на одной кости выпадет 6.

***Задача 8.*** Куб, все грани которого окрашены, распилен на 1000 кубиков. Определить вероятность того, что кубик, извлеченный наудачу, имеет три окрашенные грани. А две?

***Задача 9.*** На карточках написаны буквы А, Б, В, Г. Наугад берут две карточки. Определить вероятность того, что буквы, написанные на этих карточках, будут соседними по алфавиту.

***Задача 10.*** Определить вероятность того, что взятое наудачу трехзначное число делится на пять.

Решение тренировочной работы:

1) $n = 49$ — всего карточек спортлото. $A = \{6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48\}$, $n_A = 8$, $\mathbf{P}(A) = \frac{n_A}{n} = \frac{8}{49}$.

2) $n = 100$ — всего чисел. Переберем все числа, в которых есть цифра 3: на первом месте стоит любая цифра, а на втором месте 3 — всего 10 чисел, на первом месте — цифра 3, а на втором месте — любая цифра. Еще 10 чисел. При этом число 33 учли два раза. Т.о. чисел без 3 (событие $A$) всего $n_A = 100 - 19 = 81$. $\mathbf{P}(A) = \frac{n_A}{n} = \frac{81}{100} = 0{,}81$.

3) $n = 10$ — всего монет. $n_A = 6$ — исключаем ту десятикопеечную монету, которая оказалась второй. $\mathbf{P}(A) = \frac{n_A}{n} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$.

4) $n = 90$ — всего двузначных чисел. Если число оканчивается *1*, то его квадрат тоже оканчивается *1*. Таких чисел *9*. Если число оканчивается *9*, то его квадрат оканчивается *1*. Таких чисел *9*. Значит $n_A = 9 + 9 = 18$. Поэтому $\mathbf{P}(A) = \frac{n_A}{n} = \frac{18}{90} = \frac{1}{5}$.

5) Хотя в этой задаче тоже составляют двузначные числа, общее число исходов другое. Поскольку числа составляют из карточек, цифры в двузначном числе не могут повторятся $n = 90 - 9 = 81$. На *5* делятся все числа, оканчивающиеся *0*, их *9*, и на *5*, их *8*. Значит $n_A = 9 + 8 = 17$. Поэтому $\mathbf{P}(A) = \frac{n_A}{n} = \frac{17}{81}$.

6) $\Omega = \{\text{ГГГ}, \text{ГГЦ}, \text{ГЦГ}, \text{ЦГГ}, \text{ГЦЦ}, \text{ЦГЦ}, \text{ЦЦГ}, \text{Ц ЦЦ}\}$, $n = 8$.

$A = \{\text{ГЦЦ}, \text{ЦГЦ}, \text{ЦЦГ}\}$, $n_A = 3$. $\mathbf{P}(A) = \frac{n_A}{n} = \frac{3}{8}$.

$B = \{\text{ГЦЦ}, \text{ЦГЦ}, \text{ЦЦГ}, \text{ГГЦ}, \text{ГЦГ}, \text{ЦГГ}, \text{ГГГ}\}$, $n_B = 7$. $\mathbf{P}(B) = \frac{n_B}{n} = \frac{7}{8}$.

$C = \{\text{ГГЦ}, \text{ГЦГ}, \text{ЦГГ}, \text{ГГГ}\}$, $n_C = 4$. $\mathbf{P}(C) = \frac{n_C}{n} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$.

7) $n = 36$ (См. П1–6).

Составим таблицу исходов (Таблица 1) и выделим в ней исходы, благоприятствующие событию $A$.

Таблица 1

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | **1,1** | **1,2** | **1,3** | **1,4** | **1,5** | **1,6** |
| 2 | **2,1** | **2,2** | **2,3** | **2,4** | **2,5** | 2,6 |
| 3 | **3,1** | **3,2** | **3,3** | **3,4** | 3,5 | 3,6 |
| 4 | **4,1** | **4,2** | **4,3** | 4,4 | 4,5 | 4,6 |
| 5 | **5,1** | **5,2** | 5,3 | 5,4 | 5,5 | 5,6 |
| 6 | **6,1** | 6,2 | 6,3 | 6,4 | 6,5 | 6,6 |

Благоприятных исходов $n_A = 21$. $\mathbf{P}(A) = \frac{n_A}{n} = \frac{21}{36} = \frac{7}{12}$.

$B = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)\}$, $n_B = 6$. $\mathbf{P}(B) = \frac{n_B}{n} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

Составим таблицу (Таблица 2) и выделим в ней исходы, благоприятствующие событию $C$.

Таблица 2

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1,1 | 1,2 | 1,3 | **1,4** | 1,5 | 1,5 |
| 2 | 2,1 | **2,2** | 2,3 | **2,4** | 2,5 | **2,6** |
| 3 | 3,1 | 3,2 | 3,3 | **3,4** | 3,5 | 3,6 |
| 4 | **4,1** | **4,2** | **4,3** | **4,4** | **4,5** | **4,6** |
| 5 | 5,1 | 5,2 | 5,3 | **5,4** | 5,5 | 5,6 |
| 6 | 6,1 | **6,2** | 6,3 | **6,4** | 6,5 | **6,6** |

Благоприятных исходов $n_C = 15$. $\mathbf{P}(C) = \frac{n_C}{n} = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$.

$n_D = 11$. $\mathbf{P}(D) = \frac{n_D}{n} = \frac{11}{36}$.

8) $n = 1000$. $n_A = 8$ — по числу вершин куба. $\mathbf{P}(A) = \frac{n_A}{n} = \frac{8}{1000} = 0{,}008$.

$n_B = 96$ — на каждом ребре куба по 8 кубиков. $\mathbf{P}(B) = \frac{n_A}{n} = \frac{96}{1000} = 0{,}096$.

9) Перечислим все возможные исходы $\Omega = \{\text{АБ}, \text{АВ}, \text{АГ}, \text{БВ}, \text{БГ}, \text{ВГ}\}$, $n = 6$.

Соседние по алфавиту $A = \{\text{АБ}, \text{БВ}, \text{ВГ}\}$, $n_A = 3$. $\mathbf{P}(A) = \frac{n_A}{n} = \frac{3}{6} = 0{,}5$.

10) $n = 900$. $a_k = a_1 + d(k-1)$. У нас $995 = 100 + 5(k-1)$, поэтому $k = 180$, т.е. $n_A = 180$. $\mathbf{P}(A) = \frac{n_A}{n} = \frac{180}{900} = 0{,}2$.

До сих пор удавалось установить число исходов простым перебором возможных вариантов. Очевидно, что это легко сделать при извлечении одного предмета. Если рассматривается более одного предмета, то перебор становится затруднительным (См. ТР1–2,3).

Для подсчета числа возможных исходов при выборе более чем одного предмета, используются формулы комбинаторики:

- ***Правило умножения***. Если первый объект можно выбрать $n_1$ способами, а второй объект — $n_2$ способами, то оба объекта можно выбрать $n_1 \cdot n_2$ способами. Этот принцип распространяется на случай трех и более объектов.
- Комбинации, состоящие из одной и той же совокупности $n$ различных элементов и различающиеся только порядком их расположения, называются ***перестановками***. Число перестановок из $n$ элементов обозначается символом $P_n$ и вычисляется по формуле $P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$.
- Комбинации по $m$ элементов, составленные из $n$ различных элементов $(m < n)$ и отличающиеся друг от друга либо составом элементов, либо порядком их расположения, называются ***размещениями***. Число размещений

из $n$ элементов по $m$ обозначается символом $A_n^m$ и вычисляется по формуле $A_n^m = n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1) = \dfrac{n!}{(n-m)!}$, причем $1! = 1, 0! = 1$.

- Комбинации, содержащие $m$ элементов, составленные из $n$ различных элементов $(m < n)$ и различающиеся друг от друга хотя бы одним элементом, называются ***сочетаниями***. Число сочетаний из $n$ элементов по $m$ обозначается символом $C_n^m$ и вычисляется по формуле $C_n^m = \dfrac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)}{m!} = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$. Для сочетаний справедливы следующие равенства: $C_n^m = C_n^{n-m}$, $C_n^0 = C_n^n = 1$, $C_n^1 = n$.

## *РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ 2*

***Задача 1.*** В коробке находится *6* одинаковых по форме и близких по диаметру сверл. Случайным образом одно за другим сверла извлекают из коробки. Какова вероятность того, что сверла извлекутся в порядке возрастания их диаметра?

СЭ состоит в том, что все сверла извлекают из коробки в некотором порядке. Число возможных вариантов такого извлечения можно посчитать по формуле числа перестановок из *6* элементов: $n = P_6 = 6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$. Благоприятный исход будет такой, при котором все сверла извлекутся в порядке возрастания их диаметра, т.е. $n_A = 1$. $\mathbf{P}(A) = \dfrac{n_A}{n} = \dfrac{1}{720}$.

***Задача 2.*** *8* студентов случайным образом рассаживаются на *8* первых местах ряда партера. Какова вероятность, что студенты М и Н будут сидеть рядом?

СЭ состоит в том, что каждый студент выбирает себе место, на которое он сядет, т.е. *8* мест ряда записываются в некоторой произвольной последовательности. Количество таких записей можно сосчитать по формуле $n = P_8 = 8! = 40320$. Чтобы посчитать число благоприятных исходов, представим, что студенты М и Н взялись за руки, и, выбирая место, садятся рядом, представляя собой одно целое. При этом выбор осуществляется из *7* мест (два соседних места занятых М и Н считаем за одно). Число возможных вариантов $P_7 = 7! = 5040$. Т.к. в паре МН студенты могут поменяться местами (НМ), число вариантов необходимо удвоить. $n_A = 2 \cdot 7! = 10080$.
$\mathbf{P}(A) = \dfrac{n_A}{n} = \dfrac{2 \cdot 7!}{8!} = \dfrac{1}{4}$.

***Задача 3.*** В ящике лежат *9* кубиков с номерами от *1* до *9*. Последовательно извлекают три кубика. Найти вероятность того, что появятся кубики с номерами *2*, *5* и *9* в произвольном порядке.

СЭ — извлекают *3* кубика из *9*, фиксируя их номера. Получаются наборы из *3* цифр, в которых важен не только состав, но и порядок расположения. Количество таких наборов найдем по формуле числа размещений: $n = A_9^3 = 9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$. Благоприятными будут наборы, состоящие из цифр *2*, *5* и *9*, поставленных в произвольном порядке: $n_A = P_3 = 3! = 6$. $\mathbf{P}(A) = \frac{n_A}{n} = \frac{P_3}{A_9^3} = \frac{6}{504} = \frac{1}{84}$.

***Задача 4.*** Из *40* экзаменационных вопросов студент знает *30*. Найти вероятность того, что студент ответит на *3* предложенных ему вопроса.

СЭ — выбор *3* вопросов из *40*, при этом не важен порядок их выбора, только лишь состав. Число возможных исходов такого выбора найдем по формуле числа сочетаний из *40* по *3*: $n = C_{40}^3 = \frac{40 \cdot 39 \cdot 38}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 9880$. Исходы будут благоприятными, если выбранные вопросы студент знает, т.е. они выбирались из *30* вопросов, выученных студентом.

$n_A = C_{30}^3 = \frac{30 \cdot 29 \cdot 28}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 4060$. $\mathbf{P}(A) = \frac{n_A}{n} = \frac{C_{30}^3}{C_{40}^3} = \frac{30 \cdot 29 \cdot 28}{40 \cdot 39 \cdot 38} = \frac{203}{494} = 0{,}41$.

***Задача 5.*** В партии из *15* однотипных стиральных машин *5* изготовлены на заводе $A$, а *10* — на заводе $B$. Случайным образом отобрано *5* машин. Найти вероятность того, что *2* из них изготовлены заводом $A$.

Для понимания алгоритма решения данной задачи удобно записать условие в виде схемы (Схема 1).

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Всего было: | 5 завод $A$ | + | 10 завод $B$ | = | 15 |
| | ↓ | | ↓ | | ↓ |
| Отобрано: | 2 завод $A$ | + | 3 завод $B$ | = | 5 |

Схема 1

Все, что расположено справа от знаков равенства относится к общему числу исходов: из *15* имеющихся стиральных машин отобрано *5*. Общее число исходов $n = C_{15}^5 = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 3003$.

Все, что расположено слева от знаков равенства относится к числу исходов благоприятствующих событию: *2* выбранные машины должны быть изготовлены на заводе $A$, а *3* остальные — на заводе $B$. Число исходов благоприятствующих событию $n_A = C_5^2 \cdot C_{10}^3 = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} \cdot \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 10 \cdot 120 = 1200$. Здесь мы воспользовались правилом умножения. Т.о. вероятность искомого события

$$\mathbf{P}(A) = \frac{n_A}{n} = \frac{C_5^3 \cdot C_{10}^3}{C_{15}^5} = \frac{1200}{3003} = 0{,}4.$$

***Задача 6.*** В коробке *5* синих, *4* красных и *3* зеленых карандаша. Наудачу вынимают *3* карандаша. Какова вероятность того, что:

а) все они разных цветов;

б) среди них *2* синих и *1* зеленый;

в) среди них *2* красных.

Событие $A$ — все $3$ карандаша разных цветов. Запишем схему условия задачи (Схема 2).

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Всего было: | 5 синих | + | 4 красных | + | 3 зеленых | = | 12 |
| | ↓ | | ↓ | | ↓ | | ↓ |
| Выбрано: | 1 синий | + | 1 красный | + | 1 зеленый | = | 3 |

Схема 2

Общее число исходов $n = C_{12}^{3} = \dfrac{12 \cdot 11 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 220$. Число исходов благоприятствующих событию, один синий, один красный, один зеленый $n_A = C_5^1 \cdot C_4^1 \cdot C_3^1 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.

$$\mathbf{P}(A) = \frac{n_A}{n} = \frac{C_5^1 \cdot C_4^1 \cdot C_3^1}{C_{12}^3} = \frac{60}{220} = \frac{3}{11} = 0{,}27.$$

Событие $B$ — среди отобранных $2$ синих и $1$ зеленый. Запишем схему условия задачи (Схема 3).

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Всего было: | 5 синих | + | 4 красных | + | 3 зеленых | = | 12 |
| | ↓ | | ↓ | | ↓ | | ↓ |
| Выбрано: | 2 синих | + | 0 красных | + | 1 зеленый | = | 3 |

Схема 3

Общее число исходов $n = C_{12}^{3} = \dfrac{12 \cdot 11 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 220$. Число благоприятных исходов, аналогично предыдущему запишем $n_A = C_5^2 \cdot C_3^1 = \dfrac{5 \cdot 4 \cdot 3}{2} = 30$.

$$\mathbf{P}(A) = \frac{n_A}{n} = \frac{C_5^2 \cdot C_3^1}{C_{12}^3} = \frac{30}{220} = 0{,}14.$$

Событие $C$ — среди отобранных $2$ красных. Запишем схему условия задачи, при этом обратим внимание на то, что нас интересует, будет ли карандаш красным или не красным. Это отразится на схеме (Схема 4).

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Всего было: | 4 красных | + | 8 (3+5) не красных | = | 12 |
| | ↓ | | ↓ | | ↓ |
| Выбрано: | 2 красных | + | 1 не красный | = | 3 |

Схема 4

Общее число исходов $n = C_{12}^{3} = \dfrac{12 \cdot 11 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 220$. Число благоприятных исходов, аналогично предыдущему запишем $n_A = C_4^2 \cdot C_8^1 = \dfrac{4 \cdot 3 \cdot 8}{2} = 48$.

$$\mathbf{P}(A) = \frac{n_A}{n} = \frac{C_4^2 \cdot C_8^1}{C_{12}^3} = \frac{48}{220} = 0{,}22.$$

***Задача 7.*** Колоду из 36 карт делят пополам. Найти вероятность того, что в каждую половину попадет по два туза.

Отметим, что разделить колоду пополам это значит извлечь из нее половину карт (18 штук). В колоде имеется 4 туза и 32 другие карты (Схема 5).

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Всего карт: | 4 «туза» | + | 32 другие карты | = | 36 |
| | ↓ | | ↓ | | ↓ |
| Отобрано: | 2 «туза» | + | 16 других карт | = | 18 |

Схема 5

В соответствии с этой схемой можем записать решение задачи $\mathbf{P}(A) = \dfrac{n_A}{n} = \dfrac{C_4^2 \cdot C_{32}^{16}}{C_{36}^{18}} = 0{,}4$.

***Задача 8.*** 9 туристов наудачу рассаживаются по 12 вагонам электрички. Найти вероятность того, что все они окажутся:

а) во втором вагоне;

б) в одном вагоне;

в) в разных вагонах.

СЭ состоит в том, что каждый турист выбирает для себя вагон, в котором он поедет. При этом каждый из них имеет 12 возможностей. Поэтому в соответствии с правилом умножения число исходов равно $n = 12^9$. Благоприятные исходы:

Событие $A$ — у каждого туриста одна возможность. $n_A = 1$. $\mathbf{P}(A) = \dfrac{n_A}{n} = \dfrac{1}{12^9} = 2 \cdot 10^{-10}$.

Событие $B$ — всего 12 возможностей (по числу вагонов). $n_B = 12$. $\mathbf{P}(B) = \dfrac{n_B}{n} = \dfrac{12}{12^9} = 2{,}3 \cdot 10^{-9}$.

Событие $C$ — выбор состоит из 9 вагонов, расположенных в разной последовательности. $n_C = A_{12}^9 = 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4$. $\mathbf{P}(C) = \dfrac{n_C}{n} = \dfrac{A_{12}^9}{12^9} = 0{,}015$.

***Задача 9.*** Наудачу взятый телефонный номер состоит из семи цифр. Какова вероятность того, что в нем все цифры:

а) различны;

б) одинаковые;

в) нечетные?

Общее число исходов равно количеству различных номеров телефона. $n = 9 \cdot 10^6 = 9000000$. Учитываем, что на первом месте в номере телефона не может стоять ноль.

Событие $A$ — в номере телефона все цифры различны, значит, при выборе каждой следующей цифры количество возможностей уменьшается. $n_A = 9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 544320$. $\mathbf{P}(A) = \dfrac{n_A}{n} = \dfrac{544320}{9000000} = 0{,}06$.

Событие $B$ — в номере телефона все цифры одинаковые. Таких номеров только $9$ по числу цифр отличных от нуля. $n_B = 9$. $\mathbf{P}(B) = \frac{n_B}{n} = \frac{9}{9000000} = 1 \cdot 10^{-6}$.

Событие $C$ — в номере телефона все цифры нечетные, значит, номер телефона составляется из пяти нечетных цифр. Цифры будут обязательно повторяться. $n_C = 5^7 = 78125$. $\mathbf{P}(C) = \frac{n_C}{n} = \frac{78125}{9000000} = 0{,}0087$.

***Задача 10.*** В урне находится 40 шаров. Вероятность того, что 2 извлеченных шара окажутся белыми, равна $\frac{7}{60}$. Сколько в урне белых шаров?

Эта задача обратная: по вероятности события надо найти число шаров. Пусть в урне $x$ белых шаров. Схема условия имеет вид (Схема 6).

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Всего шаров: | $x$ белых | + | $40-x$ не белых | = | 40 |
| | ↓ | | ↓ | | ↓ |
| Отобрано: | 2 белых | + | 0 не белых | = | 2 |

Схема 6

В соответствии со схемой $\mathbf{P}(A) = \frac{n_A}{n} = \frac{C_x^2}{C_{40}^2} = \frac{x(x-1)}{40 \cdot 39}$. По условию $\mathbf{P}(A) = \frac{7}{60}$.

Можно составить уравнение $\frac{x(x-1)}{40 \cdot 39} = \frac{7}{60}$. После преобразований получим $x^2 - x - 182 = 0$. Значит $x_1 = -13, x_2 = 14$. Окончательно, в урне 14 белых шаров.

## *ТРЕНИРОВОЧНАЯ РАБОТА 2*

Попробуйте решить самостоятельно следующие задачи:

***Задача 1.*** Дано 6 карточек с буквами Н, М, И, Я, Л, О. Найти вероятность того, что:

а) получится слово ЛОМ, если наугад одна за другой выбираются три карточки;

б) получится слово МОЛНИЯ, если наугад одна за другой выбираются все шесть карточек.

***Задача 2.*** Найти вероятность того, что из $10$ книг, расположенных в случайном порядке, $3$ определенные книги окажутся рядом.

***Задача 3.*** Код домофона состоит из $5$ цифр. Найти вероятность того, что, случайно набирая цифры, можно угадать код, если:

а) цифры могут повторяться;

б) цифры не повторяются.

***Задача 4.*** Из колоды в $36$ карт извлекаются наудачу $4$ карты. Какова вероятность событий:

а) все извлеченные карты пиковой масти;

б) извлечено две карты пиковой масти и две карты бубновой масти;

в) среди извлеченных карт представлены все «картинки» («туз», «король», «дама», «валет»).

***Задача 5.*** Собрание, состоящее из *30* человек, среди которых *8* женщин, выбирает делегацию из *3* человек. Найти вероятность того, что в делегацию войдет одна женщина.

***Задача 6.*** Из *20* сбербанков *10* расположены за чертой города. Для обследования случайным образом отобрано *5* сбербанков. Какова вероятность того, что среди отобранных окажется *3* сбербанка в черте города?

***Задача 7.*** *8* шахматистов, среди которых *3* гроссмейстера, путем жеребьевки делятся на две подгруппы по *4* человека. Какова вероятность того, что два гроссмейстера попадут в одну подгруппу?

***Задача 8.*** Для постановки танца хореограф выбирает *8* человек. Определить вероятность того, что из выбранных можно составить *4* пары, если в танцевальной студии занимается *12* девочек и *8* мальчиков.

***Задача 9.*** Найти вероятность того, что *30* студентов одной группы родились:

а) в один день года;

б) в разные месяцы года;

в) в сентябре;

г) в разные дни сентября.

***Задача 10.*** В ящике *20* деталей, *4* из них — нестандартные. Какова вероятность того, что среди *6* наугад взятых деталей нестандартных не окажется?

Решение тренировочной работы:

1) В обоих случаях имеем один благоприятный исход $n_A = 1$, а вот общее число исходов находится по-разному.

Событие $A$ — получится слово ЛОМ. $n = A_6^3 = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ — выбор *3* карточек из *6* с учетом порядка. $\mathbf{P}(A) = \dfrac{n_A}{n} = \dfrac{1}{120} = 0{,}0083$.

Событие $B$ — получится слово МОЛНИЯ. $n = P_6 = 6! = 720$ — 6 карточек выкладывают в разном порядке. $\mathbf{P}(B) = \dfrac{n_B}{n} = \dfrac{1}{720} = 0{,}0014$.

2) $n = P_{10} = 10! = 3628800$ — число перестановок из 10 элементов, $n_A = 6 \cdot 8! = 241920$ — три книги расположены рядом (См. РЗ2–2). $\mathbf{P}(A) = \dfrac{n_A}{n} = \dfrac{6 \cdot 8!}{10!} = \dfrac{1}{15} = 0{,}067$.

3) Благоприятных исходов $n_A = 1$.

Событие $A$ — угадать код, если цифры могут повторяться. $n = 10^5$ — при выборе каждой цифры кода имеем $10$ возможностей. $\mathbf{P}(A) = \frac{n_A}{n} = \frac{1}{10^5} = 10^{-5}$.

Событие $B$ — угадать код, если цифры не повторяются. $n = A_{10}^5 = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 30240$ — из $10$ цифр выбираем $5$ для кода, располагая их в разном порядке. $\mathbf{P}(A) = \frac{n_A}{n} = \frac{1}{30240} = 3{,}3 \cdot 10^{-5}$.

4) Решение задачи запишем в соответствии со схемой условия.

Событие $A$ — Схема 7

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Всего карт: | 9 пиковых | + | 27 других мастей | = | 36 |
| | ↓ | | ↓ | | ↓ |
| Отобрано: | 4 пиковых | + | 0 других мастей | = | 4 |

Схема 7

$$\mathbf{P}(A) = \frac{n_A}{n} = \frac{C_9^4}{C_{36}^4} = 0{,}0021.$$

Событие $B$ — Схема 8

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Всего карт: | 9 пиковых | + | 9 бубновых | + | 18 других мастей | = | 36 |
| | ↓ | | ↓ | | ↓ | | ↓ |
| Отобрано: | 2 пиковых | + | 2 бубновых | + | 0 других мастей | = | 4 |

Схема 8

$$\mathbf{P}(A) = \frac{n_A}{n} = \frac{C_9^2 \cdot C_9^2}{C_{36}^4} = 0{,}022.$$

Событие $C$ — Схема 9

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Всего карт: | 4<br>«туза» | + | 4<br>«короля» | + | 4<br>«дамы» | + | 4<br>«валета» | + | 20<br>других карт | = | 36 |
| | ↓ | | ↓ | | ↓ | | ↓ | | ↓ | | ↓ |
| Отобрано: | 1<br>«туз» | + | 1<br>«король» | | 1<br>«дама» | | 1<br>«валет» | + | 0<br>других карт | = | 4 |

Схема 9

$$\mathbf{P}(A) = \frac{n_A}{n} = \frac{\left(C_4^1\right)^2}{C_{36}^4} = 0{,}0043.$$

5) Схема 10

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Всего человек: | 8 женщин | + | 22 мужчины | = | 30 |
| | ↓ | | ↓ | | ↓ |
| Отобрано: | 1 женщина | + | 2 мужчин | = | 3 |

Схема 10

$$\mathbf{P}(A) = \frac{n_A}{n} = \frac{C_8^1 \cdot C_{22}^2}{C_{30}^3} = 0{,}46.$$

6) Схема 11

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Всего сбербанков: | 10 в черте города | + | 10 за городом | = | 20 |
| | ↓ | | ↓ | | ↓ |
| Отобрано: | 3 в черте города | + | 2 за городом | = | 5 |

Схема 11

$$\mathbf{P}(A)=\frac{n_A}{n}=\frac{C_{10}^{3}\cdot C_{10}^{2}}{C_{20}^{5}}=0{,}35\,.$$

7) Схема 12

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Всего шахматистов: | 3 гроссмейстера | + | 5 | = | 8 |
| | ↓ | | ↓ | | ↓ |
| Отобрано: | 2 гроссмейстера | + | 2 | = | 4 |

Схема 12

$$\mathbf{P}(A)=\frac{n_A}{n}=\frac{C_{3}^{2}\cdot C_{5}^{2}}{C_{8}^{4}}=\frac{3}{7}=0{,}43\,.$$

8) Схема 13

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Всего человек: | 12 девочек | + | 8 мальчиков | = | 20 |
| | ↓ | | ↓ | | ↓ |
| Отобрано: | 4 девочек | + | 4 мальчиков | = | 8 |

Схема 13

$$\mathbf{P}(A)=\frac{n_A}{n}=\frac{C_{12}^{4}\cdot C_{8}^{4}}{C_{20}^{8}}=0{,}275\,.$$

9) Событие $A$ — $30$ студентов родились в один день года. У каждого человека имеется $365$ возможностей $n=365^{30}$. Исход благоприятный, если все дни рождения попали в один день и таких исходов $n_A=365$. $\mathbf{P}(A)=\dfrac{1}{365^{29}}$.

Событие $B$ — $30$ студентов родились в разные месяцы года. Поскольку месяцев меньше, чем человек, то не существует исходов, при которых в один месяц попадает один человек $n_B=0$. $\mathbf{P}(B)=0$.

Событие $C$ — $30$ студентов родились в сентябре. У каждого человека имеется $12$ возможностей $n=12^{30}$. Благоприятный исход, состоит в том, что все дни рождения пришлись на сентябрь $n_C=1$. $\mathbf{P}(C)=\dfrac{1}{12^{30}}$.

Событие $D$ — $30$ студентов родились в разные дни сентября. $n=365^{30}$. При благоприятных исходах 30 человек размещаются по 30 дням месяца в разном порядке $n_D=30!$. $\mathbf{P}(D)=\dfrac{30!}{365^{30}}$.

10) Общее число исходов $n = C_{20}^{6} = \dfrac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15}{6!} = 38760$. Исход будет благоприятным, если среди выбранных деталей все будут стандартными $n_A = C_{16}^{6} = \dfrac{16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11}{6!} = 8008$. Тогда $\mathbf{P}(A) = \dfrac{n_A}{n} = \dfrac{C_{16}^{6}}{C_{20}^{6}} = 0{,}207$.

## *ПРОВЕРОЧНАЯ РАБОТА 1*

Проверьте, как вы научились решать задачи по теме «Непосредственный подсчет вероятности».

Для этого предварительно постарайтесь ответить на вопросы:

1) Что такое случайный эксперимент?

2) Что понимают под элементарным исходом и пространством элементарных исходов.

3) Определения случайного события и вероятности случайного события.

4) Классическое определение вероятности события.

5) Что такое сочетание, размещение и перестановка?

6) Как найти число сочетаний, размещений и перестановок?

***Задача 1.*** Лотерея выпущена на общую сумму *1000000* рулей. Цена одного билета *50* рублей. Ценные выигрыши падают на каждый десятый билет. Определить вероятность выигрыша при покупке:

а) одного билета;

б) двух билетов.

***Задача 2.*** Некто написал на листке четырехзначное число и предложил отгадать его. Какова вероятность угадывания числа с первой попытки?

***Задача 3.*** На пяти карточках написано по одной цифре 1,2,3,4,5. Наугад выбирают две карточки. Какова вероятность того, что число на второй карточке больше чем на первой?

***Задача 4.*** Бросают две игральные кости. Определить вероятность того, что:

а) сумма выпавших очков не превосходит *5*;

б) произведение выпавших очков не превосходит *5*;

в) сумма выпавших очков делится на *5*;

г) произведение выпавших очков делится на *5*.

***Задача 5.*** Батарея, состоящая из *10* орудий, ведет огонь по *15* кораблям неприятеля. Найти вероятность того, что все орудия стреляют:

а) по одной цели;

б) по разным целям.

***Задача 6.*** В ящике находятся *20* лампочек, среди которых *3* перегоревшие лампочки. Найти вероятность того, что *10* лампочек, взятых наудачу, будут гореть.

***Задача 7.*** В ящике *50* годных и *16* дефектных деталей. Сборщик наудачу достает 8 деталей. Найти вероятность того, что среди них:

а) нет дефектных;

б) *3* дефектных.

***Задача 8.*** Железнодорожный состав из *9* вагонов и вагона–ресторана формируется произвольным образом. Какова вероятность того, что вагон №7 и вагон–ресторан расположены рядом.

***Задача 9.*** Найти вероятность того, что участник лотереи «Спортлото — 6 из 49», купивший один билет, угадает правильно:

а) 2 номера;

б) 6 номеров.

***Задача 10.*** В группе 10 юношей и 10 девушек. Для дежурства на вечере путем жеребьевки выделяют 5 человек. Какова вероятность того, что в число дежурных войдут:

а) 5 юношей;

б) 2 юноши и 3 девушки.

Сравни полученные ответы:

1) $\mathbf{P}(A)=\dfrac{2000}{20000}=0{,}1$; $\mathbf{P}(B)=\dfrac{C_{2000}^{2}}{C_{20000}^{2}}=\dfrac{1999}{199990}=0{,}01$.

2) $\mathbf{P}(A)=\dfrac{1}{9000}$.

3) $\mathbf{P}(A)=\dfrac{1}{2}$.

4) $\mathbf{P}(A)=\dfrac{10}{36}=\dfrac{5}{18}$; $\mathbf{P}(B)=\dfrac{10}{36}=\dfrac{5}{18}$; $\mathbf{P}(C)=\dfrac{7}{36}$; $\mathbf{P}(D)=\dfrac{11}{36}$.

5) $\mathbf{P}(A)=\dfrac{1}{15^{9}}=2{,}6\cdot 10^{-11}$; $\mathbf{P}(B)=\dfrac{A_{15}^{10}}{15^{10}}=0{,}019$.

6) $\mathbf{P}(A)=\dfrac{C_{17}^{10}}{C_{20}^{10}}=\dfrac{2}{19}=0{,}105$.

7) $\mathbf{P}(A)=\dfrac{C_{50}^{8}}{C_{66}^{8}}=0{,}093$; $\mathbf{P}(B)=\dfrac{C_{50}^{5}\cdot C_{16}^{3}}{C_{66}^{8}}=0{,}207$.

8) $\mathbf{P}(A)=\dfrac{2\cdot 9!}{10!}=\dfrac{1}{5}=0{,}2$.

9) $\mathbf{P}(A)=\dfrac{C_{6}^{2}\cdot C_{43}^{4}}{C_{49}^{6}}=0{,}132$; $\mathbf{P}(B)=\dfrac{1}{C_{49}^{6}}=7{,}2\cdot 10^{-8}$.

10) $\mathbf{P}(A)=\dfrac{C_{10}^{5}}{C_{20}^{5}}=0{,}016$; $\mathbf{P}(B)=\dfrac{C_{10}^{2}\cdot C_{10}^{3}}{C_{20}^{5}}=0{,}232$.

## 2 ТЕОРЕМЫ СЛОЖЕНИЯ И УМНОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Вспомним некоторые определения.

- ***Суммой событий*** $A$ и $B$ называется событие $A+B$ состоящее в наступлении хотя бы одного из данных событий $A+B=\{\omega\in\Omega | \omega\in A \text{ или } \omega\in B\}$.
- ***Произведением событий*** $A$ и $B$ называется событие $AB$, состоящее в совместном появлении этих событий $AB=\{\omega\in\Omega | \omega\in A \text{ и } \omega\in B\}$.
- ***Противоположным*** событию $A$ называется событие $\overline{A}$, которое происходит тогда и только тогда, когда не происходит событие $A$, $\overline{A}=\{\omega\in\Omega | \omega\notin A\}$.
- Два события называются ***несовместными***, если появление одного из них исключает появление другого в одном и том же опыте.
- Два события называются ***независимыми***, если появление одного из них не меняет вероятности появления другого.

Теперь можно сформулировать основные теоремы, которыми мы будем пользоваться при решении задач.

ТЕОРЕМА 1 $\mathbf{P}(AB)=\mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B/A)$. Если события независимые, то $\mathbf{P}(AB)=\mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)$.

ТЕОРЕМА 2 $\mathbf{P}(A+B)=\mathbf{P}(A)+\mathbf{P}(B)-\mathbf{P}(AB)$. Если события несовместные, то $\mathbf{P}(A+B)=\mathbf{P}(A)+\mathbf{P}(B)$.

ТЕОРЕМА 3 $\mathbf{P}(A)+\mathbf{P}(\overline{A})=1$.

### *РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ 3*

***Задача 1.*** Пусть $A$, $B$, $C$ — три произвольных события. Выразить через $A$, $B$, $C$ и противоположные к ним следующие события:

а) не произошло ни одного события;
б) произошло только событие $B$;
в) произошло только одно событие;
г) произошло ровно два события;
д) произошли все три события;
е) произошло хотя бы одно событие;
ж) произошло менее двух;
з) произошло не более двух.

а) Поскольку не произошло ни одного события, значит не произошло ни событие $A$, ни событие $B$, ни событие $C$. Поэтому произошли противоположные события $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$, причем одновременно — $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$.

б) Произошло только событие $B$ — это значит, что события $A$ и $C$ не произошли. Поэтому имеем $\overline{A}B\overline{C}$.

в) По аналогии с предыдущим: произошло только событие $A$ — $A\overline{B}\overline{C}$, произошло только событие $C$ — $\overline{A}\overline{B}C$. Произошло только одно событие это значит или только $A$, или только $B$, или только $C$, т.е. $A\overline{B}\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\overline{B}C$.

г) Рассуждая так же как в предыдущем пункте, можем получить $AB\overline{C}+A\overline{B}C+\overline{A}BC$.

д) Произошли все три события — произошло и событие $A$, и событие $B$, и событие $C$, поэтому имеем $ABC$.

е) Произошло хотя бы одно событие — это значит, произошло или одно, или два, или три события, учитывая предыдущее, запишем $A\overline{B}\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\overline{B}C+\overline{A}BC+A\overline{B}C+AB\overline{C}+ABC$. Но это событие можно записать и по-другому: отрицая искомое событие, получим — не произошло ни одного события (см. пункт а). Значит имеем $\overline{\overline{A}\overline{B}\overline{C}}$.

ж) Произошло менее двух — произошло одно или ни одного, поэтому $A\overline{B}\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\overline{B}C+\overline{A}\overline{B}\overline{C}$.

з) Произошло не более двух, т.е. два и меньше, значит $A\overline{B}\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\overline{B}C+\overline{A}BC+A\overline{B}C+AB\overline{C}+\overline{A}\overline{B}\overline{C}$. Как и в пункте е) можно записать иначе — $\overline{ABC}$.

Полученные равенства пригодятся нам в дальнейшем для решения задач.

***Задача 2.*** Рабочий обслуживает *3* станка, работающих независимо друг от друга. Вероятность того, что за смену первый станок не потребует внимания рабочего, равна *0,9*, второй — *0,8*, третий — *0,75*. Найти вероятность того, что за смену:

а) только третий станок не потребует внимания;

б) только один станок не потребует внимания.

Введем событие $A$ — первый станок не потребует внимания рабочего; $\mathbf{P}(A)=0{,}9$. Событие $B$ — второй станок не потребует внимания рабочего; $\mathbf{P}(B)=0{,}8$. Событие $C$ — третий станок не потребует внимания рабочего; $\mathbf{P}(C)=0{,}75$.

Событие $D$ — только третий станок не потребует внимания. С учетом предыдущей задачи $D=\overline{A}\overline{B}C$. Найдем вероятность этого события, используя теоремы $\mathbf{P}(D)=\mathbf{P}\left(\overline{A}\overline{B}C\right)\underset{\text{Т№1}}{\overset{\text{независ.}}{=}}\mathbf{P}\left(\overline{A}\right)\mathbf{P}\left(\overline{B}\right)\mathbf{P}(C)\underset{\text{Т№3}}{=}\left(1-\mathbf{P}\left(\overline{A}\right)\right)\left(1-\mathbf{P}\left(\overline{B}\right)\right)\mathbf{P}(C)$. События независимые по условию. Подставим значения вероятностей: $\mathbf{P}(D)=(1-0{,}9)(1-0{,}8)\cdot 0{,}75=0{,}015$.

Событие $E$ — только один станок не потребует внимания. $E=A\overline{B}\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\overline{B}C$.

$$\mathbf{P}(E)=\mathbf{P}\left(A\overline{B}\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\overline{B}C\right)\underset{\text{Т№2}}{\overset{\text{несовм.}}{=}}\mathbf{P}\left(A\overline{B}\overline{C}\right)+\mathbf{P}\left(\overline{A}B\overline{C}\right)+\mathbf{P}\left(\overline{A}\overline{B}C\right)\underset{\text{Т№1}}{\overset{\text{независ.}}{=}}$$
$$=\mathbf{P}(A)\mathbf{P}\left(\overline{B}\right)\mathbf{P}\left(\overline{C}\right)+\mathbf{P}\left(\overline{A}\right)\mathbf{P}(B)\mathbf{P}\left(\overline{C}\right)+\mathbf{P}\left(\overline{A}\right)\mathbf{P}\left(\overline{B}\right)\mathbf{P}(C)\underset{\text{Т№3}}{=}$$
$$=\mathbf{P}(A)(1-\mathbf{P}(B))(1-\mathbf{P}(C))+(1-\mathbf{P}(A))\mathbf{P}(B)(1-\mathbf{P}(C))+(1-\mathbf{P}(A))(1-\mathbf{P}(B))\mathbf{P}(C).$$

В первой сумме произведения являются несовместными событиями, т.к. если в $A\overline{B}\overline{C}$ событие $A$ произошло, то в $\overline{A}B\overline{C}$ и $\overline{A}\overline{B}C$ оно не произошло. Аналогично с другими событиями. Подставим в окончательную формулу известные вероятности: $\mathbf{P}(E)=0{,}9(1-0{,}8)(1-0{,}75)+(1-0{,}9)0{,}8(1-0{,}75)+(1-0{,}9)(1-0{,}8)0{,}75=0{,}08$.

***Задача 3.*** Студент разыскивает нужную формулу в трех справочниках. Вероятность того, что формула содержится в первом, втором и третьем справочниках, равна соответственно *0,6*, *0,7* и *0,8*. Найти вероятность того, что эта формула содержится не менее чем в двух справочниках.

Событие $D$ — формула содержится не менее чем в двух справочниках (в двух или в трех справочниках).

Введем событие $A$ — формула содержится в первом справочнике; $\mathbf{P}(A) = 0{,}6$. Событие $B$ — формула содержится во втором справочнике; $\mathbf{P}(B) = 0{,}7$. Событие $C$ — формула содержится в третьем справочнике; $\mathbf{P}(C) = 0{,}8$. Тогда $D = \overline{A}BC + A\overline{B}C + AB\overline{C} + ABC$. Значит

$$\mathbf{P}(D) = \mathbf{P}\left(\overline{A}BC + A\overline{B}C + AB\overline{C} + ABC\right) \underset{\text{Т№2}}{\overset{\text{несовм.}}{=}} \mathbf{P}\left(\overline{A}BC\right) + \mathbf{P}\left(A\overline{B}C\right) + \mathbf{P}\left(AB\overline{C}\right) + \mathbf{P}(ABC) \underset{\text{Т№1}}{\overset{\text{независ.}}{=}}$$

$$= \mathbf{P}\left(\overline{A}\right)\mathbf{P}(B)\mathbf{P}(C) + \mathbf{P}(A)\mathbf{P}\left(\overline{B}\right)\mathbf{P}(C) + \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)\mathbf{P}\left(\overline{C}\right) + \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)\mathbf{P}(C) \underset{\text{Т№3}}{=}$$

$$= (1 - \mathbf{P}(A))\mathbf{P}(B)\mathbf{P}(C) + \mathbf{P}(A)(1 - \mathbf{P}(B))\mathbf{P}(C) + \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)(1 - \mathbf{P}(C)) + \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)\mathbf{P}(C).$$

Подставляем числовые значения вероятностей

$$\mathbf{P}(D) = (1 - 0{,}6)0{,}7 \cdot 0{,}8 + 0{,}6(1 - 0{,}7)0{,}8 + 0{,}6 \cdot 0{,}7(1 - 0{,}8) + 0{,}6 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}8 = 0{,}788.$$

***Задача 4.*** Только один из *9* ключей подходит к данному замку. Какова вероятность того, что придется опробовать *4* ключа для открывания замка.

Событие $A$ — для открывания замка придется опробовать 4 ключа.

Это значит, что в первый, второй и третий раз попадутся не нужные ключи, а в четвертый раз нужный ключ. Введем соответствующие события:

Событие $A_1$ — первый взятый ключ не открыл замок.

Событие $A_2$ — второй взятый ключ не открыл замок.

Событие $A_3$ — третий взятый ключ не открыл замок.

Событие $A_4$ — четвертый взятый ключ открыл замок.

Чтобы произошло событие $A$ необходимо, чтобы произошли все события $A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_4$, значит $A = A_1A_2A_3A_4$. Все события являются зависимыми, поскольку один раз использованный ключ второй раз не проверяется и шанс обнаружить нужный ключ меняется (растет).

Имеем $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(A_1A_2A_3A_4) \underset{\text{Т№1}}{\overset{\text{зависим.}}{=}} \mathbf{P}(A_1)\mathbf{P}(A_2/A_1)\mathbf{P}(A_3/A_1A_2)\mathbf{P}(A_4/A_1A_2A_3)$. Вероятности этих событий находим по классическому определению (См. РЗ1).

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(A_1)\mathbf{P}(A_2/A_1)\mathbf{P}(A_3/A_1A_2)\mathbf{P}(A_4/A_1A_2A_3) = \frac{8}{9} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{9}.$$

***Задача 5.*** Радист трижды вызывает корреспондента. Вероятность того, что будет принят первый вызов, равна *0,3*. При каждом следующем вызове вероятность приема увеличивается на *0,02*. Определить вероятность того, что радист свяжется с корреспондентом не позднее третьего вызова.

Событие $A$ — радист свяжется с корреспондентом не позднее третьего вызова, означает, что радист свяжется с корреспондентом или при первом вызове (событие $A_1$) или при втором вызове (событие $A_2$) или при третьем вызове (событие $A_3$). При этом $\mathbf{P}(A_1)=0{,}3$. Событие $A_2$ наступит, если при первом вызове связь не установится. Аналогично с событием $A_3$. Поэтому $A=A_1+\overline{A}_1A_2+\overline{A}_1\overline{A}_2A_3$. Тогда

$$\mathbf{P}(A)=\mathbf{P}\left(A_1+\overline{A}_1A_2+\overline{A}_1\overline{A}_2A\right)\underset{\text{Т№2}}{\overset{\text{несовм.}}{=}}\mathbf{P}(A_1)+\mathbf{P}\left(\overline{A}_1A_2\right)+\mathbf{P}\left(\overline{A}_1\overline{A}_2A\right)\underset{\text{Т№1}}{\overset{\text{независ.}}{=}}$$
$$=\mathbf{P}(A_1)+\mathbf{P}\left(\overline{A}_1\right)\mathbf{P}(A_2)+\mathbf{P}\left(\overline{A}_1\right)\mathbf{P}\left(\overline{A}_2\right)\mathbf{P}(A_3)\underset{\text{Т№3}}{=}$$
$$=\mathbf{P}(A_1)+(1-\mathbf{P}(A_1))\mathbf{P}(A_2)+(1-\mathbf{P}(A_1))(1-\mathbf{P}(A_2))\mathbf{P}(A_3)=$$
$$=0{,}3+0{,}7\cdot 0{,}32+0{,}7\cdot 0{,}68\cdot 0{,}34=0{,}686.$$

***Задача 6.*** В первой урне *1* белый, *3* черных и *4* красных шара; во второй — *3* белых, *2* черных и *3* красных шара. Из каждой урны берут по одному шару и сравнивают их по цвету. Найти вероятность того, что цвета извлеченных шаров совпадают.

Событие $A$ — цвета извлеченных шаров совпадают. Введем события

| | |
|---|---|
| $A_1$ — извлеченные шары белые | $A_{11}$ — извлеченный из I-ой урны шар белый<br>$A_{12}$ — извлеченный из II-ой урны шар белый |
| $A_2$ — извлеченные шары черные | $A_{21}$ — извлеченный из I-ой урны шар черный<br>$A_{22}$ — извлеченный из II-ой урны шар черный |
| $A_3$ — извлеченные шары красные | $A_{31}$ — извлеченный из I-ой урны шар красный<br>$A_{32}$ — извлеченный из II-ой урны шар красный |

Тогда $A=A_1+A_2+A_3=A_{11}A_{12}+A_{21}A_{22}+A_{31}A_{32}$. Используя теоремы, запишем

$$\mathbf{P}(A)=\mathbf{P}\left(A_{11}A_{12}+A_{21}A_{22}+A_{31}A_{32}\right)\underset{\text{Т№2}}{\overset{\text{несовм.}}{=}}\mathbf{P}(A_{11}A_{12})+\mathbf{P}(A_{21}A_{22})+\mathbf{P}(A_{31}A_{32})\underset{\text{Т№1}}{\overset{\text{независ.}}{=}}$$
$$=\mathbf{P}(A_{11})\mathbf{P}(A_{12})+\mathbf{P}(A_{21})\mathbf{P}(A_{22})+\mathbf{P}(A_{31})\mathbf{P}(A_{32})=\frac{1}{8}\cdot\frac{3}{8}+\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{8}+\frac{4}{8}\cdot\frac{3}{8}=\frac{21}{64}.$$

***Задача 7.*** У распространителя имеется *20* билетов лотереи, среди которых *7* выигрышных. Куплено *5* билетов. Какова вероятность того, что хотя бы один из купленных билетов выигрышный?

Событие $A$ — хотя бы один из купленных билетов выигрышный.

Если в формулировке события присутствуют слова «хотя бы один», то рациональнее перейти к противоположному событию $\overline{A}$ — ни одного выигрышного билета, т.е. все невыигрышные. Вероятность такого события найдем по уже известной схеме (См. РЗ2) $\mathbf{P}\left(\overline{A}\right)=\dfrac{C_{13}^5}{C_{20}^5}=0{,}083$.

Поэтому $\mathbf{P}(A)\underset{\text{Т№3}}{=}1-\mathbf{P}\left(\overline{A}\right)=1-0{,}083=0{,}917$.

***Задача 8.*** Для приема партии, состоящей из *46* стандартных изделий и *4* бракованных, применяют выборочный контроль. Партия бракуется, если среди взятых наугад *3* изделий окажется:

а) хотя бы одно бракованное;

б) более одного бракованного.

Определить вероятность того, что партия будет принята.

Событие $A$ — партия будет принята.

а) Событие $\overline{A}$ — партия бракуется (среди взятых наугад $3$ изделий окажется хотя бы одно бракованное). $\overline{\overline{A}} = A$ — среди взятых наугад $3$ изделий ни одного бракованного (все стандартные). Вероятность этого события находим по классическому определению (См. РЗ2): $\mathbf{P}(A) = \dfrac{C_{46}^{3}}{C_{50}^{3}} = 0{,}77$.

б) Событие $\overline{A}$ — партия бракуется (среди взятых наугад $3$ изделий окажется более одного бракованного). $\overline{\overline{A}} = A$ — среди взятых наугад $3$ изделий окажется не более одного бракованного. Введем в рассмотрение события $B$ — среди взятых наугад $3$ изделий ни одного бракованного, $C$ — среди взятых наугад $3$ изделий одно бракованное. Имеем $A = B + C$. Поскольку события несовместные можем записать $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(B + C) \underset{\text{Т№2}}{\overset{\text{несовм.}}{=}} \mathbf{P}(B) + \mathbf{P}(C)$. Вероятности этих событий находим по классическому определению (См. РЗ2)

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(B) + \mathbf{P}(C) = \frac{C_{46}^{3}}{C_{50}^{3}} + \frac{C_{46}^{2} \cdot C_{4}^{1}}{C_{50}^{3}} = 0{,}77 + 0{,}21 = 0{,}98.$$

***Задача 9.*** Брошены две игральные кости. Найти вероятность того, что на первой кости выпало $2$ очка при условии, что сумма очков, выпавших на двух костях, меньше $6$.

Пусть событие $A$ — на первой кости выпало два очка, события $B$ — сумма очков, выпавших на двух костях, меньше $6$. Воспользуемся формулой $\mathbf{P}(A/B) = \dfrac{\mathbf{P}(AB)}{\mathbf{P}(B)}$. Общее число исходов $n = 36$.

Так как $A = \{(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6)\}$, а
$B = \{(1,1),(1,2),(2,1),(1,3),(3,1),(1,4),(4,1),(2,2),(2,3),(3,2)\}$, $n_B = 10$, то
$AB = \{(2,1),(2,2),(2,3)\}$, $n_{AB} = 3$. Поэтому по классическому определению $\mathbf{P}(B) = \dfrac{10}{36} = \dfrac{5}{18}$, $\mathbf{P}(AB) = \dfrac{3}{36} = \dfrac{1}{12}$. Тогда $\mathbf{P}(A/B) = \dfrac{\mathbf{P}(AB)}{\mathbf{P}(B)} = \dfrac{3}{10}$. Отметим, что эту задачу можно решить и без использования условной вероятности (См. РЗ1–7в).

***Задача 10.*** Два игрока поочередно бросают игральную кость. Выигрывает тот, у кого раньше выпадет шестерка. Найти вероятность выигрыша каждого игрока.

Пусть событие $A$ — выигрыш первого (начинающего игру) игрока, тогда $\overline{A}$ — выигрыш второго игрока. Введем событие $B$ — выпадение шестерки при одном подбрасывании игральной кости. $\mathbf{P}(B) = \dfrac{1}{6}$. Можно записать $A = B + \overline{B}\overline{B}B + \overline{B}\overline{B}\overline{B}\overline{B}B + \ldots$. Тогда

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(B + \overline{B}\overline{B}B + \overline{B}\overline{B}\overline{B}\overline{B}B + \ldots) \underset{\text{Т№2}}{\overset{\text{несовм.}}{=}} \mathbf{P}(B) + \mathbf{P}(\overline{B}\overline{B}B) + \mathbf{P}(\overline{B}\overline{B}\overline{B}\overline{B}B) + \ldots \underset{\text{Т№1}}{\overset{\text{независ.}}{=}}$$

$$= \mathbf{P}(B) + \mathbf{P}(\overline{B})\mathbf{P}(\overline{B})\mathbf{P}(B) + \mathbf{P}(\overline{B})\mathbf{P}(\overline{B})\mathbf{P}(\overline{B})\mathbf{P}(\overline{B})\mathbf{P}(B) + \ldots \underset{\text{Т№3}}{=}$$

$$= \mathbf{P}(B) + (1 - \mathbf{P}(B))(1 - \mathbf{P}(B))\mathbf{P}(B) + (1 - \mathbf{P}(B))(1 - \mathbf{P}(B))(1 - \mathbf{P}(B))(1 - \mathbf{P}(B))\mathbf{P}(B) + \ldots =$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} + \ldots = \frac{\frac{1}{6}}{1 - \frac{25}{36}} = \frac{6}{11}.$$

При вычислении суммы воспользовались формулой суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии $S = \dfrac{a_1}{1-q}$.

Вероятность выигрыша второго игрока $\mathbf{P}(\overline{A}) = 1 - \dfrac{6}{11} = \dfrac{5}{11}$.

***Задача 11.*** Вероятность попадания в «десятку» при одном выстреле равна *0,4*, а в «девятку» – *0,7*. Найти вероятность того, что при трех выстрелах стрелок наберет не менее *29* очков.

Событие $A$ — при трех выстрелах стрелок наберет не менее *29* очков. Введем события:

Событие $A_1$ — попадание в «десятку» при одном выстреле.

Событие $A_2$ — попадание в «девятку» при одном выстреле.

Чтобы набрать не менее *29* очков, надо набрать или *30* очков или *29* очков. *30* очков набирается, если трижды попасть в «десятку». А *29* очков набирается, если два раза попасть в «десятку» и один раз в «девятку». При этом необходимо учесть, что в «девятку» можно попасть и при первом и при втором и при третьем выстреле. Поэтому имеем $A = A_1A_1A_1 + A_1A_1A_2 + A_1A_2A_1 + A_2A_1A_1$.

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(A_1A_1A_1 + A_1A_1A_2 + A_1A_2A_1 + A_2A_1A_1) \overset{\text{несовм.}}{\underset{\text{Т№2}}{=}}$$

$$= \mathbf{P}(A_1A_1A_1) + \mathbf{P}(A_1A_1A_2) + \mathbf{P}(A_1A_2A_1) + \mathbf{P}(A_2A_1A_1) \overset{\text{независ.}}{\underset{\text{Т№1}}{=}}$$

$$= \mathbf{P}(A_1)\mathbf{P}(A_1)\mathbf{P}(A_1) + \mathbf{P}(A_1)\mathbf{P}(A_1)\mathbf{P}(A_2) + \mathbf{P}(A_1)\mathbf{P}(A_2)\mathbf{P}(A_1) + \mathbf{P}(A_2)\mathbf{P}(A_1)\mathbf{P}(A_1) =$$

$$= 0{,}4^3 + 0{,}4^2 \cdot 0{,}7 = 0{,}176.$$

### *ТРЕНИРОВОЧНАЯ РАБОТА 3*

Попробуйте решить самостоятельно следующие задачи.

***Задача 1.*** Из стандартного набора домино берется наудачу одна кость. Какова вероятность того, что эта кость будет дублем, если известно, что сумма очков на ней — четное число?

***Задача 2.*** В урне *4* белых и *3* черных шара. Из нее вынимают *2* шара. Найти вероятность того, что оба шара белые, если осуществляется выбор:

а) с возвращением;

б) без возвращения.

***Задача 3.*** Два стрелка делают по одному выстрелу в мишень. Вероятность попадания первого стрелка равна *0,7*, а второго — *0,8*. Найти вероятность того, что мишень будет поражена. А если стрелки сделают по два выстрела?

***Задача 4.*** Станция метрополитена оборудована тремя эскалаторами. Вероятность безотказной работы для первого эскалатора равна 0,9; для второго – 0,8; для третьего – 0,7. Найти вероятность того, что произойдет поломка не более одного эскалатора.

***Задача 5.*** Один студент выучил *20* из *25* вопросов программы, а второй — только *15*. Каждому из них задают по одному вопросу. Найти вероятность того, что правильно ответят:

а) оба студента;

б) только первый;

в) только один из них;

г) хотя бы один из студентов.

***Задача 6.*** Устройство состоит из трех независимо работающих элементов. Вероятность безотказной работы в течение некоторого времени каждого из них соответственно равна *0,6*, *0,7* и *0,8*. Найти вероятность того, что в течение некоторого времени:

а) не более одного элемента выйдут из строя;

б) менее одного элемента выйдут из строя;

в) более двух элементов выйдут из строя;

г) не менее двух элементов выйдут из строя.

***Задача 7.*** Студент знает *30* из *40* вопросов программы. Экзаменатор задает вопросы до тех пор, пока не обнаружит пробел в знаниях студента. Найти вероятность того, что будут заданы:

а) два вопроса;

б) более двух вопросов;

в) менее пяти вопросов.

***Задача 8.*** Два игрока поочередно бросают монету. Выигрывает тот, у кого раньше выпадет герб. Найти вероятность выигрыша каждого игрока.

***Задача 9.*** Покупатель ищет необходимую вещь, обходя три магазина. Вероятность наличия ее в каждом магазине равна *0,2*. Что вероятнее — найдет он вещь или нет?

***Задача 10.*** Вероятность хотя бы одного попадания в мишень стрелком при трех выстрелах равна *0,875*. Какова вероятность попадания при одном выстреле?

Решение тренировочной работы:

1) $n_B = 16$ — количество костей, у которых сумма очков — четное число, $\mathbf{P}(B) = \dfrac{16}{28} = \dfrac{4}{7}$, $n_{AB} = 7$ — количество дублей, у которых сумма очков четная (все дубли), $\mathbf{P}(AB) = \dfrac{7}{28} = \dfrac{1}{4}$. Тогда $\mathbf{P}(A/B) = \dfrac{\mathbf{P}(AB)}{\mathbf{P}(B)} = \dfrac{7}{16}$.

2) Событие $A_1$ — первый раз достали белый шар; событие $A_2$ — второй раз достали белый шар. $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(A_1) \cdot \mathbf{P}(A_2) = \dfrac{4}{7} \cdot \dfrac{4}{7} = \dfrac{16}{49}$.

$\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(A_1) \cdot \mathbf{P}(A_2/A_1) = \dfrac{4}{7} \cdot \dfrac{3}{6} = \dfrac{2}{7}$.

3) Событие $A$ — первый стрелок попал в мишень при одном выстреле; событие $B$ — второй стрелок попал в мишень при одном выстреле.
$\mathbf{P}(C) = \mathbf{P}(A + B) \underset{\text{Т№2}}{\overset{\text{совм.}}{=}} \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(AB) = 0{,}7 + 0{,}8 - 0{,}7 \cdot 0{,}8 = 0{,}94$.
$\mathbf{P}(D) = 1 - \mathbf{P}(\overline{A}\overline{B}\overline{A}\overline{B}) = 1 - 0{,}3^2 0{,}2^2 = 0{,}9964$.

4) Событие $A_i$ — безотказная работа $i$-ого эскалатора.
$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(A_1A_2A_3 + \overline{A}_1A_2A_3 + A_1\overline{A}_2A_3 + A_1A_2\overline{A}_3) =$
$= 0{,}9 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}7 + 0{,}1 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}7 + 0{,}9 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}7 + 0{,}9 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}3 = 0{,}902$.

5) Событие $A_1$ — правильно ответит первый студент, $\mathbf{P}(A_1) = \dfrac{20}{25} = \dfrac{4}{5}$. Событие $A_2$ — правильно ответит второй студент, $\mathbf{P}(A_2) = \dfrac{15}{25} = \dfrac{3}{5}$.

$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(A_1) \cdot \mathbf{P}(A_2) = \dfrac{4}{5} \cdot \dfrac{3}{5} = \dfrac{12}{25}$. $\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(A_1) \cdot \mathbf{P}(\overline{A}_2) = \dfrac{4}{5} \cdot \dfrac{2}{5} = \dfrac{8}{25}$.

$\mathbf{P}(C) = \mathbf{P}(A_1) \cdot \mathbf{P}(\overline{A}_2) + \mathbf{P}(\overline{A}_1) \cdot \mathbf{P}(A_2) = \dfrac{4}{5} \cdot \dfrac{2}{5} + \dfrac{1}{5} \cdot \dfrac{3}{5} = \dfrac{11}{25}$.

$\mathbf{P}(D) = 1 - \mathbf{P}(\overline{A}_1) \cdot \mathbf{P}(\overline{A}_2) = 1 - \dfrac{1}{5} \cdot \dfrac{2}{5} = \dfrac{23}{25}$.

6) Событие $A_i$ — в течение некоторого времени безотказно работает $i$-ый элемент.
$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(A_1A_2A_3 + \overline{A}_1A_2A_3 + A_1\overline{A}_2A_3 + A_1A_2\overline{A}_3) =$
$= 0{,}6 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}8 + 0{,}4 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}8 + 0{,}6 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}8 + 0{,}6 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}2 = 0{,}788$.
$\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(A_1A_2A_3) = 0{,}6 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}8 = 0{,}336$.
$\mathbf{P}(C) = \mathbf{P}(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3) = 0{,}4 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}2 = 0{,}024$.
$\mathbf{P}(D) = \mathbf{P}(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1\overline{A}_2A_3 + A_1\overline{A}_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1A_2\overline{A}_3) =$
$= 0{,}4 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}2 + 0{,}4 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}8 + 0{,}6 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}2 + 0{,}4 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}2 = 0{,}212$.

7) Событие $A_i$ — студент правильно ответил на заданный экзаменатором $i$-ый вопрос.

$\mathbf{P}(A)=\mathbf{P}(A_1\overline{A}_2)=\mathbf{P}(A_1)\cdot\mathbf{P}(\overline{A}_2/A_1)=\frac{30}{40}\cdot\frac{10}{39}=\frac{5}{26}=0{,}19$.

$\mathbf{P}(B)=\mathbf{P}(A_1A_2)=\mathbf{P}(A_1)\cdot\mathbf{P}(A_2/A_1)=\frac{30}{40}\cdot\frac{29}{39}=\frac{29}{52}=0{,}56$.

$\mathbf{P}(C)=1-\mathbf{P}(A_1A_2A_3A_4)=1-\frac{30}{40}\cdot\frac{29}{39}\cdot\frac{28}{38}\cdot\frac{27}{37}=1-\frac{5481}{18278}=\frac{12797}{18278}=0{,}70$.

8) Событие $B$ — выпадение герба при одном подбрасывании монеты. $\mathbf{P}(B)=\frac{1}{2}$.

$\mathbf{P}(A)=\mathbf{P}(B+\overline{B}\overline{B}B+\overline{B}\overline{B}\overline{B}\overline{B}B+\ldots)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\ldots=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{2}{3}$.

$\mathbf{P}(\overline{A})=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$.

9) Событие $A_i$ — наличие вещи в $i$-ом магазине. Событие $A$ — покупатель найдет вещь. $\mathbf{P}(A)=\mathbf{P}(A_1+\overline{A}_1A_2+\overline{A}_1\overline{A}_2A_3)=0{,}2+0{,}8\cdot 0{,}2+0{,}8\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2=0{,}488$. Вероятнее, что покупатель не найдет вещь $\mathbf{P}(\overline{A})=1-\mathbf{P}(A)=1-0{,}488=0{,}512$.

10) Событие $A_i$ — попадание в мишень при $i$-ом выстреле. $\mathbf{P}(A_1)=\mathbf{P}(A_2)=\mathbf{P}(A_3)=p$. Событие $A$ — хотя бы одно попадание при трех выстрелах. $\mathbf{P}(A)=1-\mathbf{P}(\overline{A}_1)\mathbf{P}(\overline{A}_2)\mathbf{P}(\overline{A}_3)=1-(1-p)^3=0{,}875$. $p=0{,}5$.

## *ПРОВЕРОЧНАЯ РАБОТА 2*

Проверьте, как вы научились решать задачи по теме «Теоремы сложения и умножения вероятностей».

Для этого предварительно постарайтесь ответить на вопросы:

1) Что понимают под суммой и произведением случайных событий?
2) Какие события называются несовместными?
3) Какие события называются независимыми?
4) Что такое противоположное событие?
5) Теорема сложения вероятностей для совместных и несовместных событий.
6) Условная вероятность события.
7) Теорема умножения вероятностей для зависимых и независимых событий.
8) Как вычислить вероятность противоположного события?

***Задача 1.*** Вероятность попадания в цель равна $0{,}3$, а вероятность ее уничтожения равна $0{,}05$. Найти вероятность того, что при попадании цель будет уничтожена.

***Задача 2.*** Вероятность обнаружить вирус $A$ равна $0{,}6$, вирус $B$ — $0{,}7$, а вирус $C$ — $0{,}5$. Какова вероятность того, что при обследовании будет обнаружено не менее двух вирусов?

***Задача 3.*** Вероятность того, что студент сдаст первый экзамен, равна $0,9$; второй — $0,9$; третий — $0,8$. Найти вероятность тог, что будут сданы:

а) только второй экзамен;

б) только один экзамен;

в) три экзамена;

г) по крайней мере, два экзамена;

д) хотя бы один экзамен.

***Задача 4.*** Вероятность поражения мишени при одном выстреле равна $0,6$. Стрельба ведется до первого попадания. Найти вероятность того, что будет сделано не менее четырех выстрелов.

***Задача 5.*** Вероятность дозвониться с первой попытки в справочное бюро вокзала равна $0,4$. Какова вероятность того, что:

а) удастся дозвониться при втором звонке;

б) придется звонить не более трех раз?

***Задача 6.*** Из колоды в $36$ карт наудачу вынимают три карты. Какова вероятность того, что среди них будет хотя бы одна шестерка?

***Задача 7.*** В коробке $10$ красных, $3$ синих и $7$ желтых карандашей. Наудачу вынимают $3$ карандаша. Найти вероятность того, что они все:

а) разных цветов;

б) одного цвета.

***Задача 8.*** На АТС могут поступить вызовы трех типов. Вероятности поступления вызовов 1-го, 2-го и 3-го типа соответственно равны $0,2$, $0,3$, $0,5$. поступило три вызова. Какова вероятность того, что

а) все они разных типов;

б) среди них нет вызова 2-го типа?

***Задача 9.*** Четверть билетов лотереи — выигрышные. Сколько билетов надо приобрести, чтобы с вероятностью, не меньшей $0,9$, быть уверенным, что выиграет хотя бы один билет?

***Задача 10.*** В одной комнате находятся $4$ девушки и $7$ юношей, в другой $10$ девушек и $5$ юношей. Наудачу выбирают по одному человеку из каждой комнаты. Найти вероятность того, что оба они окажутся одного пола.

Сравни полученные ответы:

1) $\mathbf{P}(A/B)=\dfrac{0,05}{0,3}=0,167$.

2) $\mathbf{P}(A)=0,6\cdot 0,7\cdot 0,5+0,4\cdot 0,7\cdot 0,5+0,6\cdot 0,3\cdot 0,5+0,6\cdot 0,7\cdot 0,5=0,65$.

3) $\mathbf{P}(A)=0,1\cdot 0,9\cdot 0,2=0,018$;

$\mathbf{P}(B)=0,9\cdot 0,1\cdot 0,2+0,1\cdot 0,9\cdot 0,2+0,1\cdot 0,1\cdot 0,8=0,044$;

$\mathbf{P}(C) = 0{,}9 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}8 = 0{,}648$;
$\mathbf{P}(D) = 0{,}9 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}8 + 0{,}1 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}8 + 0{,}9 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}8 + 0{,}9 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}2 = 0{,}954$;
$\mathbf{P}(E) = 1 - 0{,}1 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}2 = 0{,}998$.

4) $\mathbf{P}(A) = 0{,}6^4 = 0{,}1296$.

5) $\mathbf{P}(A) = 0{,}6 \cdot 0{,}4 = 0{,}24$; $\mathbf{P}(B) = 1 - 0{,}6^3 = 0{,}784$.

6) $\mathbf{P}(A) = 1 - \dfrac{C_{32}^3}{C_{36}^3} = 0{,}31$.

7) $\mathbf{P}(A) = \dfrac{C_{10}^1 \cdot C_3^1 \cdot C_7^1}{C_{20}^3} = 0{,}184$; $\mathbf{P}(B) = \dfrac{C_{10}^3 + C_3^3 + C_7^3}{C_{20}^3} = 0{,}137$.

8) $\mathbf{P}(A) = 6 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}5 = 0{,}18$; $\mathbf{P}(B) = 3 \cdot 0{,}2^2 \cdot 0{,}5 + 3 \cdot 0{,}5^2 \cdot 0{,}2 = 0{,}21$.

9) $1 - 0{,}75^n \geq 0{,}9 \Rightarrow n \geq 9$.

10) $\mathbf{P}(A) = \dfrac{4}{11} \cdot \dfrac{10}{15} + \dfrac{7}{11} \cdot \dfrac{5}{15} = \dfrac{5}{11} = 0{,}455$.

## 3 ФОРМУЛА ПОЛНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ. ФОРМУЛА БАЙЕСА

Вспомним, что

Набор случайных событий $H_1, H_2, \dots, H_n$ называется ***полной группой событий***, если

- $H_1 + H_2 + \dots + H_n = \Omega$
- $H_i \cdot H_j = \varnothing$ при $i \neq j$.

События, входящие в полную группу, часто называются ***гипотезами***.

Для вероятностей гипотез справедливо следующее равенство $\sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(H_i) = 1$.

ТЕОРЕМА 1 Если $H_1, H_2, \dots, H_n$ – полная группа событий с ненулевыми вероятностями, то для любого случайного события $A$, имеет место равенство: $\mathbf{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(H_i)\mathbf{P}(A/H_i)$, которое называется ***формулой полной вероятности***.

ТЕОРЕМА 2 Если $H_1, H_2, \dots, H_n$ – полная группа событий с ненулевыми вероятностями, то для любого случайного события $A$, такого что $\mathbf{P}(A) > 0$, справедливы равенства ***Байеса***

$$\mathbf{P}(H_i/A) = \frac{\mathbf{P}(H_i)\mathbf{P}(A/H_i)}{\sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(H_i)\mathbf{P}(A/H_i)}.$$

Формулы Байеса используются в ситуации, когда эксперимент уже проведен, событие $A$ в нем наступило и требуется оценить шансы наступления при этом гипотез $H_i$. Это формулы пересчета вероятностей гипотез на основании результатов эксперимента.

***РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ 4***

***Задача 1.*** *45%* телевизоров, имеющихся в магазине, изготовлены на I-ом заводе, *15*% — на II-ом, остальные — на III-ем заводе. Вероятности того, что телевизоры не потребуют ремонта в течение гарантийного срока, равны *0,96*, *0,84*, *0,9* соответственно. Найти вероятность того, что купленный наудачу телевизор выдержит гарантийный срок работы.

Событие $A$ — телевизор выдержит гарантийный срок работы. Сразу ответить на вопрос задачи нельзя, поскольку неизвестно какой телевизор был куплен. Поэтому выдвигаем гипотезы:

$H_1$ — телевизор изготовлен на I-ом заводе;

$H_2$ — телевизор изготовлен на II-ом заводе;

$H_3$ — телевизор изготовлен на III-ем заводе.

Выпишем все необходимые вероятности:

$\mathbf{P}(H_1) = 0{,}45$, $\mathbf{P}(H_2) = 0{,}15$, $\mathbf{P}(H_3) = 1 - 0{,}45 - 0{,}15 = 0{,}4$,

$\mathbf{P}(A/H_1) = 0{,}96$, $\mathbf{P}(A/H_2) = 0{,}84$, $\mathbf{P}(A/H_3) = 0{,}9$.

Окончательно, по формуле полной вероятности имеем

$\mathbf{P}(A) = 0{,}45 \cdot 0{,}96 + 0{,}15 \cdot 0{,}84 + 0{,}4 \cdot 0{,}9 = 0{,}918$.

***Задача 2.*** На сборку попадают детали с трех автоматов. Известно, что первый автомат дает *0,25%* брака, второй — *0,4%*, третий — *0,6%*. Какова вероятность попадания на сборку доброкачественной детали, если с первого автомата поступило *2000*, со второго — *1500* и с третьего — *1300* деталей?

Событие $A$ — на сборку попала доброкачественная деталь. Вероятность этого события зависит от того, какой автомат изготовил эту деталь. Выдвигаем гипотезы:

$H_1$ — деталь изготовлена на I-ом автомате;

$H_2$ — деталь изготовлена на II-ом автомате;

$H_3$ — деталь изготовлена на III-ем автомате.

Вероятности гипотез определяются количеством деталей поступивших с каждого автомата $\mathbf{P}(H_1) = \dfrac{2000}{4800} = 0{,}417$, $\mathbf{P}(H_2) = \dfrac{1500}{4800} = 0{,}312$, $\mathbf{P}(H_3) = \dfrac{1300}{4800} = 0{,}271$.

Условные вероятности находим как вероятности противоположенных к данным событий:

$\mathbf{P}(A/H_1) = 1 - 0{,}0025 = 0{,}9975$, $\mathbf{P}(A/H_2) = 1 - 0{,}004 = 0{,}996$,

$\mathbf{P}(A/H_3) = 1 - 0{,}006 = 0{,}994$.

Вероятность искомого события:

$\mathbf{P}(A) = 0{,}417 \cdot 0{,}9975 + 0{,}312 \cdot 0{,}996 + 0{,}271 \cdot 0{,}994 = 0{,}9961$.

***Задача 3.*** Вероятность того, что контрольную работу напишет отличник, равна *0,9*; хорошист – *0,7*; троечник – *0,4*. Найти вероятность того, что наудачу выбранный ученик напишет контрольную работу, если соотношение отличников, хорошистов и троечников в классе *1:3:5*.

Событие $A$ — ученик напишет контрольную работу.

$H_1$ — выбрали отличника;

$H_2$ — выбрали хорошиста;

$H_3$ — выбрали троечника.

Очевидно, что для нахождения вероятностей гипотез надо использовать соотношение учеников в классе. Шанс выбрать троечника много больше шанса выбрать отличника. Поэтому вероятности гипотез должны относиться как *1:3:5*, а сумма вероятностей равна *1*. Будем рассуждать так: на отличников приходится *1* часть учеников, на хорошистов — *3*, на троечников — *5*. Всего $1+3+5=9$ частей. Значит $\mathbf{P}(H_1)=\frac{1}{9}$, $\mathbf{P}(H_2)=\frac{3}{9}$, $\mathbf{P}(H_3)=\frac{5}{9}$.

Условные вероятности $\mathbf{P}(A/H_1)=0{,}9$, $\mathbf{P}(A/H_2)=0{,}7$, $\mathbf{P}(A/H_3)=0{,}4$.

Вероятность события $\mathbf{P}(A)=\frac{1}{9}\cdot 0{,}9+\frac{3}{9}\cdot 0{,}7+\frac{5}{9}\cdot 0{,}4=\frac{5}{9}$.

***Задача 4.*** Среди читателей библиотеки *75%* экономисты и *25%* инженеры. Экономисты берут книги по экономике в *5* раз больше, чем по математике, инженеры берут книги по математике в *3* раза больше, чем по экономике. Какова вероятность того, что выданная библиотекарем книга будет по экономике?

Событие $A$ — выданная библиотекарем книга будет по экономике.

$H_1$ — книгу взял экономист, $\mathbf{P}(H_1)=0{,}75$.

$H_2$ — книгу взял инженер, $\mathbf{P}(H_2)=0{,}25$

Для нахождения условной вероятности $\mathbf{P}(A/H_1)$ воспользуемся тем, что «экономист берет книги по экономике в *5* раз больше, чем по математике». Значит, на *5* книг по экономике приходится *1* по математике. Поэтому шанс взять книгу по экономике равен $\mathbf{P}(A/H_1)=\frac{5}{6}$. Во втором случае, на *1* книгу по экономике приходится *3* по математике. $\mathbf{P}(A/H_2)=\frac{1}{4}$. Окончательно $\mathbf{P}(A)=0{,}75\cdot\frac{5}{6}+0{,}25\cdot\frac{1}{4}=\frac{11}{16}$.

***Задача 5.*** Студент знает *24* билета из *30*. В каком случае вероятность вытащить счастливый билет для него больше, если он идет сдавать экзамен первым или если — вторым?

Сравним вероятности двух событий.

$A$ — вытащить счастливый билет, если он идет сдавать экзамен первым.

$B$ — вытащить счастливый билет, если он идет сдавать экзамен вторым.

$\mathbf{P}(A)=\frac{24}{30}=0{,}8$. А вероятность события $B$ зависит от того, какой билет вытащит студент, сдающий экзамен первым.

$H_1$ — студент, сдающий экзамен первым вытащил счастливый для второго билет;

$H_2$ — студент, сдающий экзамен первым вытащил несчастливый для второго билет.

$\mathbf{P}(H_1)=\frac{24}{30}=\frac{4}{5}$, $\mathbf{P}(H_2)=\frac{6}{30}=\frac{1}{5}$. Тогда $\mathbf{P}(B/H_1)=\frac{23}{29}$, $\mathbf{P}(B/H_2)=\frac{24}{29}$. И $\mathbf{P}(B)=\frac{4}{5}\cdot\frac{23}{29}+\frac{1}{5}\cdot\frac{24}{29}=\frac{116}{145}=0{,}8$. Значит $\mathbf{P}(A)=\mathbf{P}(B)=0{,}8$.

***Задача 6.*** В трех одинаковых урнах находятся шары: в первой с номерами от *1* до *9*, во второй от *10* до *20* и в третьей от *21* до *30*. Из случайно выбранной урны берется шар. Какова вероятность того, что его номер делится на *3*?

Событие $A$ — номер выбранного шара делится на *3*.

$H_1$ — выбрали первую урну;

$H_2$ — выбрали вторую урну;

$H_3$ — выбрали третью урну.

Поскольку нет оснований полагать, что какая-то урна обладает преимуществом при выборе, естественно считать, что гипотезы имеют равные вероятности. $\mathbf{P}(H_1)=\mathbf{P}(H_2)=\mathbf{P}(H_3)=\frac{1}{3}$. Посчитав количество шаров в каждой урне и количество номеров кратных *3*, найдем по классическому определении вероятности (См. РЗ1) $\mathbf{P}(A/H_1)=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$, $\mathbf{P}(A/H_2)=\frac{3}{11}$, $\mathbf{P}(A/H_3)=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$.

Тогда $\mathbf{P}(A)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{11}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5}=0{,}335$.

***Задача 7.*** Из ящика, содержащего 4 белых и 6 черных шаров, утеряно два шара. Какова вероятность извлечь после этого два шара черного цвета?

Событие $A$ — извлечение двух шаров черного цвета. Вероятность этого события зависит от того, какие шары были утеряны.

$H_1$ — утеряно два черных шара;

$H_2$ — утеряно два белых шара;

$H_3$ — утерян один черный шар и один белый шар.

Для вычисления всех вероятностей используем известную схему (См. РЗ2): $\mathbf{P}(H_1)=\frac{C_6^2}{C_{10}^2}=\frac{15}{45}=\frac{5}{15}$, $\mathbf{P}(H_2)=\frac{C_4^2}{C_{10}^2}=\frac{6}{45}=\frac{2}{15}$, $\mathbf{P}(H_1)=\frac{C_4^1C_6^1}{C_{10}^2}=\frac{24}{45}=\frac{8}{15}$.

$\mathbf{P}(A/H_1)=\frac{C_4^2}{C_8^2}=\frac{6}{28}$, $\mathbf{P}(A/H_2)=\frac{C_6^2}{C_8^2}=\frac{15}{28}$, $\mathbf{P}(A/H_3)=\frac{C_5^2}{C_8^2}=\frac{10}{28}$.

Окончательно имеем $\mathbf{P}(A)=\frac{5}{15}\cdot\frac{6}{28}+\frac{2}{15}\cdot\frac{15}{28}+\frac{8}{15}\cdot\frac{10}{28}=\frac{1}{3}$.

***Задача 8.*** Три стрелка случайным образом распределяют между собой *3* заряда, один из которых холостой. Стрелки попадают в мишень с вероятностями $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}$ и $\frac{7}{8}$ соответственно. Какова вероятность хотя бы одного попадания в мишень?

Событие $A$ — хотя бы одно попадания в мишень. Будем искать вероятность противоположенного события (См. Р33). Событие $\overline{A}$ — ни одного попадания в мишень. Вероятность этого события зависит от того, кому из стрелков достанется холостой патрон.

$H_1$ — холостой патрон у первого стрелка;

$H_2$ — холостой патрон у второго стрелка;

$H_3$ — холостой патрон у третьего стрелка.

Очевидно $\mathbf{P}(H_1) = \mathbf{P}(H_2) = \mathbf{P}(H_3) = \frac{1}{3}$. Заметим, что стрелок, имеющий холостой патрон, заведомо промахнется (вероятность промаха равна *1*). Условные вероятности ищем по теореме умножения. $\mathbf{P}(\overline{A}/H_1) = 1 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{32}$, $\mathbf{P}(\overline{A}/H_2) = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{16}$, $\mathbf{P}(\overline{A}/H_3) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{1}{8}$. $\mathbf{P}(\overline{A}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{32} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{16} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8} = \frac{7}{96}$.

Окончательно $\mathbf{P}(A) = 1 - \mathbf{P}(\overline{A}) = \frac{89}{96}$.

***Задача 9.*** Два стрелка стреляют по одному разу, независимо друг от друга, выбирая одну из двух мишеней. Вероятность выбора первой мишени для первого стрелка *0,5*, а для второго — *0,6*. Вероятность попадания в выбранную мишень для каждого стрелка равна *0,8* и *0,9* соответственно. Какова вероятность ровно одного попадания во вторую мишень?

Событие $A$ — ровно одно попадание во вторую мишень. Вероятность этого события зависит от того, какие мишени были выбраны каждым стрелком.

$H_1$ — первый стрелок стреляет в I-ю мишень, второй стрелок стреляет в I-ю мишень;

$H_2$ — первый стрелок стреляет в I-ю мишень, второй стрелок стреляет во II-ю мишень;

$H_3$ — первый стрелок стреляет во II-ю мишень, второй стрелок стреляет в I-ю мишень;

$H_4$ — первый стрелок стреляет во II-ю мишень, второй стрелок стреляет во II-ю мишень.

Каждая из гипотез представляет собой произведение двух независимых событий. Их вероятности найдем по теореме умножения.

$\mathbf{P}(H_1) = 0{,}5 \cdot 0{,}6 = 0{,}3$, $\mathbf{P}(H_2) = 0{,}5(1 - 0{,}6) = 0{,}2$, $\mathbf{P}(H_3) = (1 - 0{,}5) \cdot 0{,}6 = 0{,}3$, $\mathbf{P}(H_1) = (1 - 0{,}5) \cdot (1 - 0{,}6) = 0{,}2$.

Условные вероятности: $\mathbf{P}(A/H_1) = 0$, поскольку оба стрелка стреляли в первую мишень, во вторую мишень попаданий быть не может. $\mathbf{P}(A/H_2) = 0{,}9$ — только второй стрелок стрелял во вторую мишень. Аналогично $\mathbf{P}(A/H_3)=0{,}8$. $\mathbf{P}(A/H_4)=0{,}8(1-0{,}9)+(1-0{,}8)0{,}9=0{,}26$ — только одно попадание в мишень (См. Р33).

Вероятность искомого события $\mathbf{P}(A)=0{,}3\cdot 0+0{,}2\cdot 0{,}9+0{,}3\cdot 0{,}8+0{,}2\cdot 0{,}26=0{,}472$.

***Задача 10.*** На шахматную доску $4\times 4$ ставят два слона. Какова вероятность того, что они не бьют друг друга?

Событие $A$ — два слона не бьют друг друга. Отметим, что вероятность этого события зависит от того, как будет поставлен первый слон.

$H_1$ — первый слон стоит в одной из клеток внешнего квадрата, тогда побить его можно из трех клеток поля.

$H_2$ — первый слон стоит в одной из клеток внутреннего квадрата, тогда побить его можно из пяти клеток поля.

$\mathbf{P}(H_1)=\frac{12}{16}=\frac{3}{4}$, $\mathbf{P}(H_2)=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$. Тогда $\mathbf{P}(A/H_1)=\frac{12}{15}=\frac{4}{5}$, $\mathbf{P}(A/H_2)=\frac{10}{15}=\frac{2}{3}$.

Полная вероятность события $\mathbf{P}(A)=\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}+\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}=\frac{23}{30}$.

## *ТРЕНИРОВОЧНАЯ РАБОТА 4*

Попробуйте решить самостоятельно следующие задачи.

***Задача 1.*** Из *1000* ламп *100* принадлежит первой партии, *250* — второй и остальные — третьей партии. В первой партии *6%* , во второй — *5%*, в третьей — *4%* бракованных ламп. Наудачу выбирается одна лампа. Какова вероятность того, что выбранная лампа бракованная?

***Задача 2.*** Автомобиль на перекрестке может поехать прямо, а может свернуть направо или налево. Вероятность попадания в «пробку» при проезде прямо равна *0,5*; направо – *0,3*; налево – *0,2*. Определить вероятность беспрепятственного проезда.

***Задача 3.*** В торговую фирму поставляются телевизоры тремя фирмами в соотношении *5:2:3*. Телевизоры не требуют ремонта в течение гарантийного срока соответственно в *96%*, *92%* и *94%* случаев. Найти вероятность того, что купленный телевизор не потребует ремонта в течение гарантийного срока.

***Задача 4.*** Имеются три одинаковых ящика. В первом лежат *2* белых и *2* черных шара; во втором — *3* черных шара; в третьем — *1* черный и *5* белых шара. Некто случайным образом вынимает шар из наугад выбранного ящика. Какова вероятность, что шар будет белый?

***Задача 5.*** В трех одинаковых урнах находятся шары: в первой с номерами от *10* до *25*, во второй от *26* до *32* и в третьей от *33* до *45* включительно. Из случайно выбранной урны берется шар. Какова вероятность того, что его номер будет простым числом?

***Задача 6.*** Берут две колоды по 36 карт. Из первой колоды во вторую перекладывают 2 карты. Затем из второй колоды берется одна карта. Какова вероятность того, что это дама?

***Задача 7.*** В альбоме *7* негашеных и *6* гашеных марок. Из них наудачу извлекаются *2* марки, подвергаются гашению и возвращаются в альбом. После чего вновь извлекают *3* марки. Определить вероятность того, что все *3* марки чистые.

***Задача 8.*** Среди трех игральных костей одна фальшивая. На фальшивой кости шестерка появляется с вероятностью $\frac{1}{3}$. Бросили две игральные кости. Определить вероятность того, что выпали две шестерки.

***Задача 9.*** Два стрелка И и П поочередно стреляют в мишень до первого попадания, но не более двух раз каждый. Вероятность попадания при одном выстреле для И равна *0,8*, а для П — *0,6*. Первый стрелок определяется жребием. Выигрывает стрелок попавший первым. Какова вероятность выигрыша для стрелка П?

***Задача 10.*** Из полного набора домино наудачу берут две кости. Какова вероятность того, что вторую кость можно приставить к первой?

Решение тренировочной работы:

1) Событие $A$ — выбранная лампа бракованная.

$H_1$ — лампа принадлежит первой партии;

$H_2$ — лампа принадлежит второй партии;

$H_3$ — лампа принадлежит третьей партии.

$$\mathbf{P}(H_1)=\frac{100}{1000}=0,1,\ \mathbf{P}(H_2)=\frac{250}{1000}=0,25,\ \mathbf{P}(H_3)=\frac{650}{1000}=0,65.$$

$$\mathbf{P}(A/H_1)=0,06,\ \mathbf{P}(A/H_2)=0,05,\ \mathbf{P}(A/H_3)=0,04.$$

$$\mathbf{P}(A)=0,1\cdot 0,06+0,25\cdot 0,05+0,65\cdot 0,04=0,0445.$$

2) Событие $A$ — беспрепятственный проезд автомобиля.

$H_1$ — автомобиль поехал прямо;

$H_2$ — автомобиль свернул направо;

$H_3$ — автомобиль свернул налево.

$$\mathbf{P}(H_1)=\mathbf{P}(H_2)=\mathbf{P}(H_3)=\frac{1}{3}.$$

$$\mathbf{P}(A/H_1)=1-0,5=0,5,\ \mathbf{P}(A/H_2)=1-0,3=0,7,\ \mathbf{P}(A/H_3)=1-0,2=0,8.$$

$$\mathbf{P}(A)=\frac{1}{3}(0,5+0,7+0,8)=\frac{2}{3}$$

3) Событие $A$ — купленный телевизор не потребует ремонта в течение гарантийного срока.

$H_1$ — телевизор изготовлен первой фирмой;

$H_2$ — телевизор изготовлен второй фирмой;

$H_3$ — телевизор изготовлен третьей фирмой.

$\mathbf{P}(H_1)=\dfrac{5}{10}=0{,}5$, $\mathbf{P}(H_2)=\dfrac{2}{10}=0{,}2$, $\mathbf{P}(H_3)=\dfrac{3}{10}=0{,}3$.

$\mathbf{P}(A/H_1)=0{,}96$, $\mathbf{P}(A/H_2)=0{,}92$, $\mathbf{P}(A/H_3)=0{,}94$.

$\mathbf{P}(A)=0{,}5\cdot 0{,}96+0{,}2\cdot 0{,}92+0{,}3\cdot 0{,}94=0{,}946$.

4) Событие $A$ — выбранный шар будет белый.

$H_1$ — шар взят из первого ящика;

$H_2$ — шар взят из второго ящика;

$H_3$ — шар взят из третьего ящика.

$\mathbf{P}(H_1)=\mathbf{P}(H_2)=\mathbf{P}(H_3)=\dfrac{1}{3}$.

$\mathbf{P}(A/H_1)=\dfrac{2}{4}=0{,}5$, $\mathbf{P}(A/H_2)=0$, $\mathbf{P}(A/H_3)=\dfrac{5}{6}=0{,}83$.

$\mathbf{P}(A)=\dfrac{1}{3}(0{,}5+0+0{,}83)=0{,}443$.

5) Событие $A$ — номер выбранного шара будет простым числом.

$H_1$ — шар взят из первого ящика;

$H_2$ — шар взят из второго ящика;

$H_3$ — шар взят из третьего ящика.

$\mathbf{P}(H_1)=\mathbf{P}(H_2)=\mathbf{P}(H_3)=\dfrac{1}{3}$.

$\mathbf{P}(A/H_1)=\dfrac{5}{16}$, $\mathbf{P}(A/H_2)=\dfrac{2}{7}$, $\mathbf{P}(A/H_3)=\dfrac{3}{13}$.

$\mathbf{P}(A)=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{5}{16}+\dfrac{2}{7}+\dfrac{3}{13}\right)=0{,}276$.

6) Событие $A$ — из второй колоды взяли даму.

$H_1$ — из первой во вторую колоду переложили две дамы;

$H_2$ — из первой во вторую колоду переложили одну даму;

$H_3$ — из первой во вторую колоду переложили две не дамы.

$\mathbf{P}(H_1)=\dfrac{C_4^2}{C_{36}^2}=\dfrac{3}{315}$, $\mathbf{P}(H_2)=\dfrac{C_4^1C_{32}^1}{C_{36}^2}=\dfrac{64}{315}$, $\mathbf{P}(H_3)=\dfrac{C_{32}^2}{C_{36}^2}=\dfrac{248}{315}$.

$\mathbf{P}(A/H_1)=\dfrac{6}{38}$, $\mathbf{P}(A/H_2)=\dfrac{5}{38}$, $\mathbf{P}(A/H_3)=\dfrac{4}{38}$.

$\mathbf{P}(A)=\dfrac{3}{315}\cdot\dfrac{6}{38}+\dfrac{64}{315}\cdot\dfrac{5}{38}+\dfrac{248}{315}\cdot\dfrac{4}{38}=\dfrac{133}{1197}$.

7) Событие $A$ — все $3$ марки чистые.

$H_1$ — в первый раз взяли две гашеные марки;

$H_2$ — в первый раз взяли одну гашеную и одну чистую марку;

$H_3$ — в первый раз взяли две чистые марки.

$$\mathbf{P}(H_1)=\frac{C_6^2}{C_{13}^2}=\frac{5}{26},\ \mathbf{P}(H_2)=\frac{C_7^1C_6^1}{C_{13}^2}=\frac{14}{26},\ \mathbf{P}(H_3)=\frac{C_7^2}{C_{13}^2}=\frac{7}{26}.$$

$$\mathbf{P}(A/H_1)=\frac{C_7^3}{C_{13}^3}=\frac{35}{286},\ \mathbf{P}(A/H_2)=\frac{C_6^3}{C_{13}^3}=\frac{20}{286},\ \mathbf{P}(A/H_3)=\frac{C_5^3}{C_{13}^3}=\frac{10}{286}.$$

$$\mathbf{P}(A)=\frac{5}{26}\cdot\frac{35}{286}+\frac{14}{26}\cdot\frac{20}{286}+\frac{7}{26}\cdot\frac{10}{286}=\frac{525}{7436}.$$

8) Событие $A$ — при бросании двух костей выпали две шестерки.
$H_1$ — среди брошенных костей была фальшивая;
$H_2$ — среди брошенных костей не было фальшивой;

$$\mathbf{P}(H_1)=\frac{2}{3},\ \mathbf{P}(H_2)=\frac{1}{3}.$$

$$\mathbf{P}(A/H_1)=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{18}=\frac{2}{36},\ \mathbf{P}(A/H_2)=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{36}.$$

$$\mathbf{P}(A)=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{36}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{36}=\frac{5}{108}.$$

9) Событие $A$ — выигрыша для стрелка П.
$H_1$ — первым стреляет стрелок И;
$H_2$ — первым стреляет стрелок П.

$$\mathbf{P}(H_1)=\mathbf{P}(H_2)=\frac{1}{2}.$$

$$\mathbf{P}(A/H_1)=(1-0{,}8)\cdot 0{,}6+(1-0{,}8)\cdot(1-0{,}6)\cdot(1-0{,}8)\cdot 0{,}6=0{,}1296,$$

$$\mathbf{P}(A/H_2)=0{,}6+(1-0{,}6)\cdot(1-0{,}8)\cdot 0{,}6=0{,}648.$$

$$\mathbf{P}(A)=\frac{1}{2}(0{,}1296+0{,}648)=0{,}3888.$$

10) Событие $A$ — вторую кость можно приставить к первой.
$H_1$ — первая кость дубль;
$H_2$ — первая кость не дубль.

$$\mathbf{P}(H_1)=\frac{1}{4},\ \mathbf{P}(H_2)=\frac{3}{4}.$$

$$\mathbf{P}(A/H_1)=\frac{6}{27},\ \mathbf{P}(A/H_2)=\frac{12}{27}.$$

$$\mathbf{P}(A)=\frac{1}{4}\cdot\frac{6}{27}+\frac{3}{4}\cdot\frac{12}{27}=\frac{42}{108}=\frac{7}{18}.$$

## *РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ 5*

***Задача 1.*** Предположим, что *5%* мужчин и *0,25%* женщин дальтоники. Наугад выбранное лицо оказалось дальтоником. Считая, что мужчин и женщин одинаковое количество, найти вероятность того, что этот человек мужчина.

Из условия задачи известно, что выбранное лицо оказалось дальтоником это и будет событие $A$. Его вероятность зависит от того, кто был выбран — мужчина или женщина.

$H_1$ — выбран мужчина;

$H_2$ — выбрана женщина.

Выпишем соответствующие вероятности: $\mathbf{P}(H_1) = \mathbf{P}(H_2) = 0{,}5$, $\mathbf{P}(A/H_1) = 0{,}05$, $\mathbf{P}(A/H_2) = 0{,}0025$. Тогда $\mathbf{P}(A) = 0{,}5(0{,}05 + 0{,}0025) = 0{,}02625$. Вероятность того, что выбрали мужчину, если он оказался дальтоником найдем по формуле Байеса $\mathbf{P}(H_1/A) = \dfrac{\mathbf{P}(H_1)\mathbf{P}(A/H_1)}{\mathbf{P}(A)} = \dfrac{0{,}5 \cdot 0{,}05}{0{,}02625} = 0{,}953$.

***Задача 2.*** В ящик, содержащий *3* белых и *2* черных шара, добавили *2* шара. После этого из него вытащили *2* шара. Они оказались разных цветов. Какое предположение о цвете доложенных шаров наиболее вероятно?

Событие $A$ — два извлеченных шара оказались разных цветов (то, которое произошло). Гипотезы выдвигаем в отношении цвета доложенных шаров.

$H_1$ — доложили два белых шара;

$H_2$ — доложили два черных шара;

$H_3$ — доложили один белый и один черный шар.

Поскольку все предположения о цвете шаров равновозможны $\mathbf{P}(H_1) = \mathbf{P}(H_2) = \mathbf{P}(H_3) = \dfrac{1}{3}$. Для нахождения условных вероятностей используем классическое определение (См. РЗ2): $\mathbf{P}(A/H_1) = \dfrac{C_5^1 C_2^1}{C_7^2} = \dfrac{10}{21}$, $\mathbf{P}(A/H_2) = \dfrac{C_3^1 C_4^1}{C_7^2} = \dfrac{12}{21}$, $\mathbf{P}(A/H_3) = \dfrac{C_4^1 C_3^1}{C_7^2} = \dfrac{12}{21}$. Тогда $\mathbf{P}(A) = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{10}{21} + \dfrac{12}{21} + \dfrac{12}{21}\right) = \dfrac{34}{63}$. Переоценим вероятности гипотез $\mathbf{P}(H_1/A) = \dfrac{\frac{1}{3}\cdot\frac{10}{21}}{\frac{34}{63}} = \dfrac{5}{17}$, $\mathbf{P}(H_2/A) = \dfrac{\frac{1}{3}\cdot\frac{12}{21}}{\frac{34}{63}} = \dfrac{6}{17}$, $\mathbf{P}(H_3/A) = \dfrac{\frac{1}{3}\cdot\frac{12}{21}}{\frac{34}{63}} = \dfrac{6}{17}$.

Заметим, что сумма вероятностей гипотез и в этом случае равна единице. Наиболее вероятно предположение о том, что доложили два черных или один черный и один белый шар.

***Задача 3.*** В телеграфном сообщении количество сигналов «точка» и «тире» относятся как *3:2*. Известно, что в результате помех искажается $\dfrac{2}{5}$ сигналов «точка» и $\dfrac{1}{3}$ сигналов «тире». Найти вероятность того, что принят передаваемый сигнал, если принят сигнал «точка».

Событие $A$ — принят сигнал «точка» (по условию задачи оно уже наступило). Выдвигаем гипотезы о том, какой сигнал был передан:

$H_1$ — передан сигнал «точка»;

$H_2$ — передан сигнал «тире».

Вычислим полную вероятность события $A$. $\mathbf{P}(H_1)=\frac{3}{5}$, $\mathbf{P}(H_2)=\frac{2}{5}$, $\mathbf{P}(A/H_1)=\frac{3}{5}$, $\mathbf{P}(A/H_2)=\frac{1}{3}$. $\mathbf{P}(A)=\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5}+\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{3}=\frac{37}{75}$.

Вероятность того, что принят передаваемый сигнал, если принят сигнал «точка»

$$\mathbf{P}(H_1/A)=\frac{\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5}}{\frac{37}{75}}=\frac{27}{37}.$$

***Задача 4.*** В группе из 10 студентов, пришедших на экзамен, 3 подготовлены отлично, 4 — хорошо, 2 — посредственно и 1 — плохо. Отлично подготовленный студент может ответить на все 20 вопросов, хорошо подготовленный — на 16, посредственно — на 10, плохо — на 5. Вызванный наугад студент ответил на три вопроса. Найти вероятность того, что студент подготовлен:

а) отлично;

б) плохо.

Событие $A$ — вызванный наугад студент ответил на три вопроса.

$H_1$ — вызван отлично подготовленный студент;

$H_2$ — вызван хорошо подготовленный студент;

$H_3$ — вызван посредственно подготовленный студент;

$H_4$ — вызван плохо подготовленный студент.

Вычислим необходимые вероятности: $\mathbf{P}(H_1)=\frac{3}{10}$, $\mathbf{P}(H_2)=\frac{4}{10}$, $\mathbf{P}(H_3)=\frac{2}{10}$, $\mathbf{P}(H_4)=\frac{1}{10}$. $\mathbf{P}(A/H_1)=1$, $\mathbf{P}(A/H_2)=\frac{C_{16}^3}{C_{20}^3}=\frac{28}{57}$, $\mathbf{P}(A/H_3)=\frac{C_{10}^3}{C_{20}^3}=\frac{2}{19}$, $\mathbf{P}(A/H_4)=\frac{C_5^3}{C_{20}^3}=\frac{1}{114}$. $\mathbf{P}(A)=\frac{3}{10}\cdot 1+\frac{4}{10}\cdot\frac{28}{57}+\frac{2}{10}\cdot\frac{2}{19}+\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{114}=\frac{591}{1140}=\frac{197}{380}$.

Вычислим вероятности первой и последней гипотез по формуле Байеса

$$\mathbf{P}(H_1/A)=\frac{\mathbf{P}(H_1)\mathbf{P}(A/H_1)}{\mathbf{P}(A)}=\frac{\frac{3}{10}\cdot 1}{\frac{197}{380}}=\frac{114}{197},\ \mathbf{P}(H_4/A)=\frac{\mathbf{P}(H_4)\mathbf{P}(A/H_4)}{\mathbf{P}(A)}=\frac{\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{114}}{\frac{197}{380}}=\frac{3}{197}.$$

***Задача 5.*** Ракета накрывает цель с вероятностью $\frac{2}{3}$. По цели выпущено две ракеты. Известно, что при одном попадании цель поражается с вероятностью $\frac{1}{2}$, а при двух с вероятностью $\frac{5}{6}$. Цель поражена. Какова вероятность, что в нее попала ровно одна ракета?

Событие $A$ — цель поражена.

$H_1$ — обе ракеты не попали в цель;

$H_2$ — только одна ракета попала в цель;

$H_3$ — обе ракеты попали в цель.

Вероятности гипотез высчитываем, используя теоремы сложения и умножения (См. P33) $\mathbf{P}(H_1)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$, $\mathbf{P}(H_2)=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$, $\mathbf{P}(H_3)=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$. Условные вероятности заданы $\mathbf{P}(A/H_1)=0$, $\mathbf{P}(A/H_2)=\frac{1}{2}$, $\mathbf{P}(A/H_3)=\frac{5}{6}$. Тогда $\mathbf{P}(A)=\frac{1}{9}\cdot 0+\frac{4}{9}\cdot\frac{1}{2}+\frac{4}{9}\cdot\frac{5}{6}=\frac{32}{54}=\frac{16}{27}$.

Вероятность того, что в цель попала ровно одна ракета при условии, что цель поражена $\mathbf{P}(H_2/A)=\frac{\mathbf{P}(H_2)\mathbf{P}(A/H_2)}{\mathbf{P}(A)}=\frac{\frac{4}{9}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{16}{27}}=\frac{3}{8}$.

## *ТРЕНИРОВОЧНАЯ РАБОТА 5*

Попробуйте решить самостоятельно следующие задачи.

***Задача 1.*** В студенческой группе *70%* юношей. *20%* юношей и *40%* девушек имеют сотовый телефон. После занятий в аудитории был найден кем-то забытый телефон. Какова вероятность того, что он принадлежал

а) юноше;

б) девушке?

***Задача 2.*** Два стрелка независимо друг от друга сделали по одному выстрелу в мишень. Вероятности их попадания в мишень соответственно равны *0,75* и *0,8*. После стрельбы в мишени обнаружена одна пробоина. Какова вероятность того, что в мишень попал 2-ой стрелок?

***Задача 3.*** Из четырех игральных костей одна фальшивая — на ней *6* очков выпадает с вероятностью $\frac{1}{3}$. При бросании случайно выбранной кости выпала шестерка. Какова вероятность того, что была выбрана фальшивая кость?

***Задача 4.*** Если при бросании игральной кости выпадет больше четырех очков, то вынимают два шара из первой урны, содержащей *3* красных и *2* черных шара. Иначе два шара берут из второй урны, содержащей *2* красных и *4* черных шара. Вытащили *1* красный и *1* черный шар. Найти вероятность того, что они взяты из первой урны.

***Задача 5.*** Взяли две колоды по *36* карт и случайным образом переложили две карты из первой колоды во вторую. Затем из второй колоды вытащили одну карту, которая оказалась пиковой масти. Какое предположение о составе переложенных карт наиболее вероятно?

Решение тренировочной работы:

1) Событие $A$ — в аудитории найден забытый телефон.

$H_1$ — телефон принадлежал юноше;

$H_2$ — телефон принадлежал девушке;

$\mathbf{P}(H_1)=0{,}7$, $\mathbf{P}(H_2)=1-0{,}7=0{,}3$. $\mathbf{P}(A/H_1)=0{,}2$, $\mathbf{P}(A/H_2)=0{,}4$.

$\mathbf{P}(A)=0{,}7\cdot 0{,}2+0{,}3\cdot 0{,}4=0{,}26$.

$$\mathbf{P}(H_1/A)=\frac{\mathbf{P}(H_1)\mathbf{P}(A/H_1)}{\mathbf{P}(A)}=\frac{0{,}7\cdot 0{,}2}{0{,}26}=0{,}538,$$

$$\mathbf{P}(H_2/A)=\frac{\mathbf{P}(H_2)\mathbf{P}(A/H_2)}{\mathbf{P}(A)}=\frac{0{,}3\cdot 0{,}4}{0{,}26}=0{,}462.$$

2) Событие $A$ — в мишени обнаружена одна пробоина.

$H_1$ — оба стрелка промахнулись;

$H_2$ — первый стрелок попал, второй стрелок промахнулся;

$H_3$ — первый стрелок промахнулся, второй стрелок попал;

$H_4$ — оба стрелка попали.

$\mathbf{P}(H_1)=0{,}75\cdot 0{,}8=0{,}6$, $\mathbf{P}(H_2)=0{,}75\cdot 0{,}2=0{,}15$, $\mathbf{P}(H_3)=0{,}25\cdot 0{,}8=0{,}2$, $\mathbf{P}(H_4)=0{,}25\cdot 0{,}2=0{,}05$. $\mathbf{P}(A/H_1)=0$, $\mathbf{P}(A/H_2)=1$, $\mathbf{P}(A/H_3)=1$, $\mathbf{P}(A/H_4)=0$.

$\mathbf{P}(A)=0{,}6\cdot 0+0{,}15\cdot 1+0{,}2\cdot 1+0{,}05\cdot 0=0{,}35$.

$$\mathbf{P}(H_3/A)=\frac{0{,}2\cdot 1}{0{,}35}=0{,}571.$$

3) Событие $A$ — при бросании кости выпала шестерка.

$H_1$ — выбрана фальшивая кость;

$H_2$ — выбрана не фальшивая кость.

$\mathbf{P}(H_1)=\frac{1}{4}$, $\mathbf{P}(H_2)=\frac{3}{4}$. $\mathbf{P}(A/H_1)=\frac{1}{3}$, $\mathbf{P}(A/H_2)=\frac{1}{6}$.

$$\mathbf{P}(A)=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{6}=\frac{5}{24}.\quad \mathbf{P}(H_1/A)=\frac{\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{5}{24}}=\frac{2}{5}.$$

4) Событие $A$ — Вытащили *1* красный и *1* черный шар.

$H_1$ — шары брали из первой урны;

$H_2$ — шары брали из второй урны.

$$\mathbf{P}(H_1)=\frac{1}{3},\ \mathbf{P}(H_2)=\frac{2}{3}.\ \mathbf{P}(A/H_1)=\frac{C_3^1\cdot C_2^1}{C_5^2}=\frac{3}{5},\ \mathbf{P}(A/H_1)=\frac{C_2^1\cdot C_4^1}{C_6^2}=\frac{8}{15}.$$

$$\mathbf{P}(A)=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5}+\frac{2}{3}\cdot\frac{8}{15}=\frac{5}{9}.\ \mathbf{P}(H_1/A)=\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5}}{\frac{5}{9}}=\frac{9}{25}.$$

5) Событие $A$ — из второй колоды вытащили карту пиковой масти.
$H_1$ —из первой колоды во вторую переложили две пиковые карты;
$H_2$ — из первой колоды во вторую переложили две не пиковые карты;
$H_3$ — из первой колоды во вторую переложили одну пиковую карту, а другую не пиковую карту;

$$\mathbf{P}(H_1)=\frac{C_9^2}{C_{36}^2}=\frac{2}{35},\qquad \mathbf{P}(H_2)=\frac{C_{27}^2}{C_{36}^2}=\frac{39}{70},\qquad \mathbf{P}(H_3)=\frac{C_9^1\cdot C_{27}^1}{C_{36}^2}=\frac{27}{70}.\qquad \mathbf{P}(A/H_1)=\frac{11}{38},$$

$$\mathbf{P}(A/H_2)=\frac{9}{38},\ \mathbf{P}(A/H_3)=\frac{10}{38}.\ \mathbf{P}(A)=\frac{4}{70}\cdot\frac{11}{38}+\frac{39}{70}\cdot\frac{9}{38}+\frac{27}{70}\cdot\frac{10}{38}=\frac{665}{2660}=\frac{133}{532}.$$

$$\mathbf{P}(H_1/A)=\frac{\frac{4}{70}\cdot\frac{11}{38}}{\frac{133}{532}}=\frac{44}{665},\ \mathbf{P}(H_2/A)=\frac{\frac{39}{70}\cdot\frac{9}{38}}{\frac{133}{532}}=\frac{351}{665},\ \mathbf{P}(H_2/A)=\frac{\frac{27}{70}\cdot\frac{10}{38}}{\frac{133}{532}}=\frac{270}{665}.$$

## *ПРОВЕРОЧНАЯ РАБОТА 3*

Проверьте, как вы научились решать задачи по теме «Формула полной вероятности. Формула Байеса».

Для этого предварительно постарайтесь ответить на вопросы:

1) Какие события называются попарно несовместными?
2) Что такое полная группа событий?
3) Что можно сказать о вероятностях полной группы событий?
4) Условная вероятность.
5) Формула полной вероятности.
6) Формулы Байеса и когда они используются.

***Задача 1.*** Известно, что в среднем *95%* выпускаемой продукции удовлетворяет стандарту. Упрощенная схема контроля признает пригодной продукцию с вероятностью *0,96*, если она стандартная, и с вероятностью *0,06*, если она нестандартная. Найти вероятность того, что взятое наудачу изделие пройдет упрощенный контроль.

***Задача 2.*** На елочный базар поступают елки с трех лесхозов, причем 1-ый лесхоз поставил *50%* елок, 2-ой — *30%*, 3-ий — остальные. Среди елок 1-ого лесхоза *10%* голубых, 2-ого — *20%*, 3-его —*30%*. Куплена одна елка, она оказалась голубой. Какова вероятность того, что она поставлена 2-ым лесхозом?

***Задача 3.*** На шахматную доску $4 \times 4$ ставят два ферзя. Какова вероятность того, что они не бьют друг друга?

***Задача 4.*** Игроки могут с равной вероятностью играть в одну из двух игр. В одной игре используется одна игральная кость, и счет в игре равен количеству выпавших очков. В другой игре используются две игральные кости, и счет в игре равен сумме выпавших очков. Вы слышите, что выпало *4* очка. В какую игру вероятнее всего играли?

***Задача 5.*** В первой урне *3* белых и *7* черных шаров, во второй *5* белых и *2* черных. Из первой переложили во вторую три шара, затем из второй извлечен один шар. Какова вероятность того, что он белый?

***Задача 6.*** Готовясь к экзамену, студент должен был подготовить ответы на две серии вопросов по *10* вопросов каждая. Он выучил *7* вопросов первой серии и *9* вопросов второй. Экзаменатор случайно выбирает серию вопросов и два вопроса из нее, на оба из которых нужно ответить. Каковы шансы, что студент сдаст экзамен?

***Задача 7.*** В первой корзине *5* яблок и *5* груш, во второй *–4* яблока и *6* груш, в третьей – *6* яблок и *4* груши. Из наугад выбранной корзины взяли *4* фруктов и выложили на тарелку. На тарелке оказалось *2* яблока и *2* груши. Найти вероятность того, что фрукты взяли из третьей корзины.

***Задача 8.*** Два игрока И и П один раз бросают игральную кость и затем два раза монету. Если на кости выпадет 1 или 2, то игрок И выигрывает, если при подбрасывании монет появится хотя бы один герб. Если же на кости выпадет число большее двух, то игрок И выигрывает, если при подбрасывании монет появится два герба. Справедлива ли игра?

***Задача 9.*** В пункте проката имеется 8 новых и 10 подержанных автомобилей (т.е. хотя бы раз использованных). Три машины взяли в прокат и спустя некоторое время вернули. После этого вновь взяли в прокат два автомобиля. Какова вероятность того, что оба автомобиля новые?

***Задача 10.*** В трех одинаковых урнах находятся шары: в первой с номерами от *1* до *9*, во второй от *10* до *20* и в третьей от *21* до *30*. Из случайно выбранной урны берется шар и оказывается, что его номер делится на *5*. Какова вероятность того, что шар взят из второй урны?

Сравни полученные ответы:

1) $\mathbf{P}(A) = 0{,}95 \cdot 0{,}96 + 0{,}05 \cdot 0{,}06 = 0{,}915$.

2) $\mathbf{P}(H_2/A) = \dfrac{0{,}3 \cdot 0{,}2}{0{,}5 \cdot 0{,}1 + 0{,}3 \cdot 0{,}2 + 0{,}2 \cdot 0{,}3} = 0{,}353$.

3) $\mathbf{P}(A)=\frac{3}{4}\cdot\frac{6}{15}+\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{15}=\frac{22}{60}=0{,}367$.

4) $\mathbf{P}(H_1/A)=\dfrac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{12}\right)}=\frac{2}{3}$, $\mathbf{P}(H_2/A)=\dfrac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{12}}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{12}\right)}=\frac{1}{3}$. Вероятнее, что играли с одной костью.

5) $\mathbf{P}(A)=\frac{1}{120}\cdot\frac{8}{10}+\frac{21}{120}\cdot\frac{7}{10}+\frac{63}{120}\cdot\frac{6}{10}+\frac{5}{120}\cdot\frac{10}{10}=\frac{583}{1200}=0{,}486$.

6) $\mathbf{P}(A)=\frac{1}{2}\cdot\frac{7}{15}+\frac{1}{2}\cdot\frac{12}{15}=\frac{19}{30}=0{,}633$.

7) $\mathbf{P}(H_3/A)=\dfrac{\frac{1}{3}\cdot\frac{9}{21}}{\frac{1}{3}\left(\frac{10}{21}+\frac{9}{21}+\frac{9}{21}\right)}=\frac{9}{28}=0{,}321$.

8) $\mathbf{P}(\text{И})=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}=\frac{5}{12}$, $\mathbf{P}(\text{П})=1-\frac{5}{12}=\frac{7}{12}$. Игра не справедлива.

9) $\mathbf{P}(A)=\frac{5}{34}\cdot\frac{28}{153}+\frac{15}{34}\cdot\frac{21}{153}+\frac{35}{102}\cdot\frac{15}{153}+\frac{7}{102}\cdot\frac{10}{153}=\frac{980}{7803}=0{,}126$.

10) $\mathbf{P}(H_2/A)=\dfrac{\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{11}}{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{9}+\frac{3}{11}+\frac{2}{10}\right)}=\frac{135}{289}=0{,}467$.

## 4 СХЕМА ИСПЫТАНИЙ БЕРНУЛЛИ

Вспомним, что если проводится $n$ независимых испытаний, в каждом из которых может наступить некоторое событие $A$ (***успех***) с вероятностью $p$ или наступить событие $\overline{A}$ (***неудача***) с вероятностью $q$, то вероятность наступления события $A$ ровно $k$ раз можно найти по формуле $\mathbf{P}_{n,k}=C_n^k p^k q^{n-k}$ (***формула Бернулли***).

Наиболее вероятное число наступлений события $A$ в серии из $n$ испытаний можно определить из неравенства $np-q\le k_0\le np+p$.

Если число испытаний $n$ велико, а вероятность $p$ мала, причем произведение $np$ стремится к постоянному числу $\lambda$, то вероятность $\mathbf{P}_{n,k}$ можно приближенно найти по ***формуле Пуассона*** $\mathbf{P}_{n,k}\approx\dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$. Обычно ее используют, если $\lambda=np\le 10$.

## *РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ 6*

***Задача 1.*** Вероятность появления некоторого события в каждом из *8* независимых опытов равна *0,2*. Определить вероятность того, что событие появится *3* раза.

Из условия задачи понятно, что $n = 8$, $k = 3$, $p = 0{,}2$. $q$ легко найти, как вероятность противоположного события $q = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$. Поэтому искомая вероятность $\mathbf{P}_{8,3} = C_8^3 0{,}2^3 0{,}8^5 = 0{,}147$.

***Задача 2.*** Всхожесть семян данного сорта растений, составляет *70%*. Какова вероятность того, что из *6* посеянных взойдет *5* семян?

Процент всхожести означает, что каждое семя с данной вероятностью имеет шанс взойти. Поэтому $n = 6$, $k = 5$, $p = 0{,}7$, $q = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$. Тогда $\mathbf{P}_{6,5} = C_6^5 0{,}7^5 0{,}3^1 = 0{,}303$.

***Задача 3.*** Что вероятнее выиграть у равносильного противника четыре партии из шести или пять из семи (ничьи не учитываются)?

Поскольку противники равносильные, вероятности выигрыша и проигрыша в одной партии равны между собой, поэтому $p = q = \frac{1}{2}$. В первом случае $n = 6$, $k = 4$ и $\mathbf{P}_{6,4} = C_6^4 \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{15}{64}$. Во втором случае $n = 7$, $k = 5$ и $\mathbf{P}_{7,5} = C_7^5 \left(\frac{1}{2}\right)^5 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{21}{128}$. Очевидно, что $\mathbf{P}_{6,4} > \mathbf{P}_{7,5}$.

***Задача 4.*** Пусть вероятность того, что студент опоздает на лекцию, равна *0,08*. Найти наиболее вероятное число опоздавших из *96* студентов.

В данном случае $n = 96$, $p = 0{,}08$, $q = 0{,}92$. Запишем неравенство $96 \cdot 0{,}08 - 0{,}92 \le k_0 \le 96 \cdot 0{,}08 + 0{,}08$ или $6{,}76 \le k_0 \le 7{,}76$. Целое число, удовлетворяющее данному неравенству $k_0 = 7$. Это наиболее вероятное число опоздавших студентов.

***Задача 5.*** Какова вероятность того, что при пятикратном подбрасывании игрального кубика два раза выпадет число очков кратное трем?

Кубик подбрасывают пять раз, значит $n = 5$. При каждом подбрасывании может наступить событие $A$ — выпадет число очков кратное трем. Его вероятность найдем по классическому определению $p = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. Далее $q = \frac{2}{3}$, $k = 2$. Значит $\mathbf{P}_{5,2} = C_5^2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{80}{243} = 0{,}329$.

***Задача 6.*** В урне *8* белых и *4* черных шара. Наудачу вынимают с возвращением *12* шаров. Найти вероятность того, что белых шаров будет вынуто:

а) один;

б) менее трех.

Поскольку шары вынимают с возвращением, вероятность достать белый шар от испытания к испытанию не меняется, т.е. имеет место схема испытаний Бернулли. Найдем вероятность извлечения одного белого шара $p = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$. $n = 12$, $q = \frac{1}{3}$.

Тогда $\mathbf{P}_{12,1} = C_{12}^{1}\left(\frac{2}{3}\right)^{1}\left(\frac{1}{3}\right)^{11} = \frac{8}{177147} = 4{,}52 \cdot 10^{-5}$.

Событие $A$ — вынуто менее трех шаров, т.е. или два, или один, или ноль шаров. Имеем сумму вероятностей, каждая из которых находится по формуле Бернулли. $\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}_{12,0} + \mathbf{P}_{12,1} + \mathbf{P}_{12,2} = C_{12}^{0}\left(\frac{2}{3}\right)^{0}\left(\frac{1}{3}\right)^{12} + C_{12}^{1}\left(\frac{2}{3}\right)^{1}\left(\frac{1}{3}\right)^{11} + C_{12}^{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{10} =$

$= \frac{1}{531441} + \frac{8}{177147} + \frac{88}{177147} = \frac{289}{531441} = 5{,}44 \cdot 10^{-4}$.

***Задача 7.*** В семье *6* детей. Найти вероятность того, что в данной семье не менее двух, но не более четырех мальчиков. Считать вероятность рождения мальчика и девочки равными.

Поскольку вероятность рождения мальчика и девочки равны $p = q = \frac{1}{2}$. $n = 6$. Событие $A$ — не менее двух, но не более четырех мальчиков — это или два, или три, или четыре мальчика. Значит

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}_{6,2} + \mathbf{P}_{6,3} + \mathbf{P}_{6,4} = C_{6}^{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{4} + C_{6}^{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{3} + C_{6}^{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{2} =$$

$$= \frac{15}{64} + \frac{20}{64} + \frac{15}{64} = \frac{25}{32} = 0{,}781.$$

***Задача 8.*** Тест содержит *10* вопросов, на которые следует отвечать: да или нет. Какова вероятность получения не менее *80%* правильных ответов, если использовать «метод угадывания»?

Событие $A$ — не менее *80%* правильных ответов, т.е. не менее *8* правильных ответов $(10 \cdot 0{,}8 = 8)$, это означает *8* и более. Значит $n = 10$, $k = 8; 9; 10$. Очевидно, что $p = q = \frac{1}{2}$. Поэтому

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}_{10,8} + \mathbf{P}_{10,9} + \mathbf{P}_{10,10} = C_{10}^{8}\left(\frac{1}{2}\right)^{8}\left(\frac{1}{2}\right)^{2} + C_{10}^{9}\left(\frac{1}{2}\right)^{9}\left(\frac{1}{2}\right)^{1} + C_{10}^{10}\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\left(\frac{1}{2}\right)^{0} =$$

$$= \frac{45}{1024} + \frac{10}{1024} + \frac{1}{1024} = \frac{28}{512} = 0{,}055.$$

***Задача 9.*** Вероятность «сбоя» в работе телефонной станции при каждом вызове равна *0,007*. Поступило *1000* вызова. Определить вероятность *9* «сбоев».

По условию $n = 1000$, $k = 9$, $p = 0{,}007$. Поскольку $n$ — велико, а $p$ — мало $(np = 7 < 10)$, то для вычисления $\mathbf{P}_{1000,9}$ можно использовать формулу Пуассона. В нашем случае $\lambda = np = 7$, откуда $\mathbf{P}_{1000,9} \approx \dfrac{7^9 e^{-7}}{9!} = 0{,}1014$.

***Задача 10.*** Завод-изготовитель отправил на базу *12000* доброкачественных изделий. Число изделий поврежденных при транспортировке, составляет в среднем *0,05%*. Найти вероятность того, что на базу поступит?

а) не более трех поврежденных изделий;

б) хотя бы два поврежденных изделия.

Применим формулу Пуассона. Имеем $n = 12000$, $p = 0{,}0005$, $\lambda = np = 6 < 10$.

Событие $A$ — не более трех поврежденных изделий, т.е. три и меньше.

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}_{12000,0} + \mathbf{P}_{12000,1} + \mathbf{P}_{12000,2} + \mathbf{P}_{12000,3} = \frac{6^0 e^{-6}}{0!} + \frac{6^1 e^{-6}}{1!} + \frac{6^2 e^{-6}}{2!} + \frac{6^3 e^{-6}}{3!} = 0{,}151$$

Событие $B$ — хотя бы два поврежденных изделия. Вероятность этого события будем искать через вероятность противоположного события — менее двух поврежденных.

$$\mathbf{P}(B) = 1 - \left(\mathbf{P}_{12000,0} + \mathbf{P}_{12000,1}\right) = 1 - \left(\frac{6^0 e^{-6}}{0!} + \frac{6^1 e^{-6}}{1!}\right) = 0{,}983.$$

## *ТРЕНИРОВОЧНАЯ РАБОТА 6*

Попробуйте решить самостоятельно следующие задачи.

***Задача 1.*** Вычислить вероятность четырех появлений герба при *10* подбрасываниях монеты.

***Задача 2.*** Большая партия изделий содержит *25%* нестандартных. Найти вероятность того, что из восьми отобранных пять окажутся стандартными.

***Задача 3.*** Найти наивероятнейшее число выигрышей в *9* партиях с равносильным противником и соответствующую вероятность.

***Задача 4.*** Вероятность того, что лампа останется исправной в течение месяца, равна *0,2*. В коридоре поставили *5* новых ламп. Какова вероятность того, из строя выйдет не более одной лампы?

***Задача 5.*** По каналу связи передается *7* сообщений, каждое из которых, независимо от других, может быть искажено с вероятностью *0,15*. Найти наиболее вероятное число искаженных сообщений и соответствующую вероятность.

***Задача 6.*** Игральную кость подбрасывают *6* раз. Найти вероятность того, что пятерка выпадет:

а) два раза;

б) не более пяти раз;

в) хотя бы один раз.

***Задача 7.*** Вероятность попадания в цель при каждом выстреле равна *0,8*. Найти вероятность того, что при *5* выстрелах цель будет поражена:

а) два раза;

б) не менее двух раз;

в) не будет поражена ни разу.

***Задача 8.*** Проведено *8* независимых испытаний, каждое из которых заключается в одновременном подбрасывании двух монет. Найти вероятность того, что

а) в трех испытаниях появится по два герба;

б) не менее двух раз выпадет два герба.

***Задача 9.*** Вероятность допустить ошибку при наборе некоторого текста, состоящего из *1200* знаков, равна *0,005*. Найти:

а) наивероятнейшее число допущенных ошибок;

б) будет допущена хотя бы одна ошибка.

***Задача 10.*** Какова вероятность того, что среди *730* пассажиров поезда:

а) четверо родились 23 февраля;

б) двое родились 1 марта;

в) никто не родился 22 июня? (Считать, что в году *365* дней).

Решение тренировочной работы:

1) $n=10$, $k=4$, $p=q=\frac{1}{2}$. $\mathbf{P}_{10,4}=C_{10}^{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{6}=\frac{210}{1024}=\frac{105}{512}=0{,}205$.

2) $n=8$, $k=3$, $p=0{,}25$, $q=0{,}75$. $\mathbf{P}_{8,3}=C_{8}^{3}(0{,}25)^{3}(0{,}75)^{5}=0{,}208$.

3) $n=9$, $p=q=\frac{1}{2}$. $k_0=4, k_0=5$.

$$\mathbf{P}_{9,4}=\mathbf{P}_{9,5}=C_{9}^{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{5}=\frac{126}{512}=\frac{63}{256}=0{,}246.$$

4) $n=5$, $k=0;1$, $p=0{,}2$, $q=0{,}8$.

$$\mathbf{P}_{5,0}+\mathbf{P}_{5,1}=C_{5}^{0}(0{,}2)^{0}(0{,}8)^{5}+C_{5}^{1}(0{,}2)^{1}(0{,}8)^{4}=0{,}3276+0{,}4096=0{,}7372$$

5) $n=7$, $p=0{,}15$, $q=0{,}85$. $k_0=1$. $\mathbf{P}_{7,1}=C_{7}^{1}(0{,}15)^{1}(0{,}85)^{6}=0{,}396$.

6) $n=6$, $p=\frac{1}{6}$, $q=\frac{5}{6}$.

$$k=2.\ \mathbf{P}_{6,2}=C_{6}^{2}\left(\frac{1}{6}\right)^{2}\left(\frac{5}{6}\right)^{4}=\frac{9375}{46656}=\frac{3125}{15552}=0{,}201.$$

$k=5;6$.

$$\mathbf{P}(B)=\mathbf{P}_{6,5}+\mathbf{P}_{6,6}=C_6^5\left(\frac{1}{6}\right)^5\left(\frac{5}{6}\right)^1+C_6^6\left(\frac{1}{6}\right)^6\left(\frac{5}{6}\right)^0=$$

$$=\frac{30}{46656}+\frac{1}{46656}=\frac{31}{46656}=6{,}64\cdot10^{-4}.$$

$$\mathbf{P}(C)=1-\mathbf{P}_{6,0}=C_6^0\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^6=1-\frac{15625}{46656}=\frac{31031}{46656}=0{,}665.$$

7) $n=7$, $p=0{,}15$, $q=0{,}85$. $k_0=1$. $\mathbf{P}_{7,1}=C_7^1(0{,}15)^1(0{,}85)^6=0{,}396$.

8) $n=8$, $p=\dfrac{1}{4}$, $q=\dfrac{3}{4}$. $k=3$. $\mathbf{P}_{8,3}=C_8^3\left(\dfrac{1}{4}\right)^3\left(\dfrac{3}{4}\right)^5=\dfrac{1701}{8192}=0{,}208$

$$\mathbf{P}(B)=1-\left(\mathbf{P}_{8,0}+\mathbf{P}_{8,1}\right)=1-\left(C_8^0\left(\frac{1}{4}\right)^0\left(\frac{3}{4}\right)^8+C_8^1\left(\frac{1}{4}\right)^1\left(\frac{3}{4}\right)^7\right)=$$

$$=1-\left(\frac{6561}{65536}+\frac{17496}{65536}\right)=\frac{41579}{65536}=0{,}634$$

9) $n=1200$, $p=0{,}005$, $q=0{,}995$. $k_0=6$. $\mathbf{P}(B)=1-\mathbf{P}_{1200,0}=1-\dfrac{6^0e^{-6}}{0!}=0{,}9974$.

10) $n=730$, $p=\dfrac{1}{365}=0{,}0027$, $q=0{,}9973$. $k=4$, $\mathbf{P}_{730,4}\approx\dfrac{1{,}97^4e^{-1{,}97}}{4!}=0{,}0887$.

$k=2$, $\mathbf{P}_{730,2}\approx\dfrac{1{,}97^2e^{-1{,}97}}{2!}=0{,}274$. $k=0$, $\mathbf{P}_{730,0}\approx\dfrac{1{,}97^0e^{-1{,}97}}{0!}=0{,}141$

## *ПРОВЕРОЧНАЯ РАБОТА 4*

Проверьте, как вы научились решать задачи по теме «Схема испытаний Бернулли».

Для этого предварительно постарайтесь ответить на вопросы:

1) Какие события называются независимыми?
2) В чем состоит суть схемы испытаний Бернулли?
3) По какой формуле подсчитывается число сочетаний?
4) Формула Бернулли.
5) Формула Пуассона и условия ее применения.

***Задача 1.*** Какова вероятность три раза попасть в цель, если вероятность попадания равна *0,3* и производится *8* независимых выстрелов?

***Задача 2.*** В ралли участвует *20* машин. Вероятность выхода из соревнования каждой из них *0,05*. Найти:

а) наивероятнейшее число вышедших из соревнования машин;

б) вероятность того, что к финишу придут *18* машин.

***Задача 3.*** Предполагается, что *10%* открывающихся малых предприятий прекращают свою деятельность в течение года. Какова вероятность того, что из шести малых предприятий более двух в течение года прекратят свою деятельность?

***Задача 4.*** Кубик подбрасывают семь раз. Какова вероятность того, что в четырех случаях выпадет число очков большее *4*?

***Задача 5.*** В среднем пятая часть поступающих в продажу автомобилей некомплектны. Найти вероятность того, что среди десяти автомобилей имеют некомплектность:

а) три автомобиля;

б) менее трех автомобилей.

***Задача 6.*** Десять человек пришли на избирательный участок и случайным образом отдали свои голоса за одного из пяти кандидатов в президенты. Какова вероятность того, что за первого по списку кандидата проголосовало *3* человека?

***Задача 7.*** Из урны, содержащей *12* белых и *48* черных шаров, наудачу с последующим возвращением извлекают один шар. Найти вероятность того, что среди извлеченных шаров будет не менее четырех белых, если процедуру повторить *5* раз.

***Задача 8.*** Две игральные кости бросают шесть раз. Найти вероятность того, что сумма очков, равная восьми, выпадет не более двух раз.

***Задача 9.*** Учебник издан тиражом *10000* экземпляров. Вероятность того, что экземпляр учебника сброшюрован неправильно, равна *0,0001*. Найти вероятность того, что:

а) тираж содержит *5* бракованных книг;

б) по крайней мере *9998* книг сброшюрованы правильно.

***Задача 10.*** Вероятность того, что пассажир опоздает к отправлению поезда, равна *0,01*. Найти наиболее вероятное число опоздавших из *800* пассажиров и вероятность такого числа опоздавших.

Сравни полученные ответы:

1) $\mathbf{P}_{8,3} = C_8^3(0,3)^3(0,7)^5 = 0,254$.

2) $k_0 = 1$; $\mathbf{P}(B) = C_{20}^2(0,05)^2(0,95)^{18} = 0,189$.

3) $\mathbf{P}(A) = 1 - \left(C_6^0(0,1)^0(0,9)^6 + C_6^1(0,1)^1(0,9)^5 + C_6^2(0,1)^2(0,9)^4\right) = 0,016$.

4) $\mathbf{P}_{7,4} = C_7^4\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{2}{3}\right)^3 = 0,128$.

5) $\mathbf{P}_{10,3} = C_{10}^3\left(\frac{1}{5}\right)^3\left(\frac{4}{5}\right)^7 = 0,201$;

$$\mathbf{P}(B) = C_{10}^0\left(\frac{1}{5}\right)^0\left(\frac{4}{5}\right)^{10} + C_{10}^1\left(\frac{1}{5}\right)^1\left(\frac{4}{5}\right)^9 + C_{10}^2\left(\frac{1}{5}\right)^2\left(\frac{4}{5}\right)^8 = 0,687.$$

6) $\mathbf{P}_{10,3} = C_{10}^{3}\left(\frac{1}{5}\right)^{3}\left(\frac{4}{5}\right)^{7} = 0,201$.

7) $\mathbf{P}(A) = C_{5}^{4}\left(\frac{1}{5}\right)^{4}\left(\frac{4}{5}\right)^{1} + C_{5}^{5}\left(\frac{1}{5}\right)^{5}\left(\frac{4}{5}\right)^{0} = 0,0067$.

8) $\mathbf{P}(A) = C_{6}^{0}\left(\frac{5}{36}\right)^{0}\left(\frac{31}{36}\right)^{6} + C_{6}^{1}\left(\frac{5}{36}\right)^{1}\left(\frac{31}{36}\right)^{5} + C_{6}^{2}\left(\frac{5}{36}\right)^{2}\left(\frac{31}{36}\right)^{4} = 0,961$.

9) $\mathbf{P}_{10000,5} \approx \frac{1^5 e^{-1}}{5!} = 0,0031$; $\mathbf{P}(B) = \frac{1^0 e^{-1}}{0!} + \frac{1^1 e^{-1}}{1!} + \frac{1^2 e^{-1}}{2!} = 0,926$.

10) $k_0 = 8$, $\mathbf{P}_{800,8} \approx \frac{8^8 e^{-8}}{8!} = 0,147$.

## *ПРОВЕРОЧНАЯ РАБОТА 5*

Попробуйте решить примерные варианты контрольной работы по теме «Вероятность случайного события»:

ВАРИАНТ № 1

1) На складе имеется *15* принтеров, *5* из них изготовлены фирмой ***hp***. Найти вероятность того, что среди *5* наудачу взятых принтеров:
   а) ровно три принтера изготовлены фирмой ***hp***;
   б) окажется хотя бы один, изготовленный фирмой ***hp***.
2) Две бактерии $A$ и $B$ поражают вирус с вероятностями *0,7* и *0,8* соответственно действуя, независимо друг от друга. Найти вероятность того, что вирус поражен
   а) только одной бактерией;
   б) не менее чем одной бактерией.
3) Литье в болванках поступает из двух цехов: из первого в два раза больше, чем из второго цеха. При этом первый цех дает *5%* брака, а второй – *15%*. Найти вероятность того, что взятая наугад болванка не содержит дефекта.
4) Вероятность таксисту проколоть шину за день работы, равна *0,02*. Найти вероятность того, что за *10* дней таксисту придется менять шину не более одного раза.

ВАРИАНТ № 2

1) В корзине *10* спелых и *4* неспелых апельсина. Какова вероятность того, что среди выбранных наудачу пяти апельсинов
   а) не более двух спелых апельсинов;
   б) хотя бы один спелый апельсин?
2) Вероятность поражения мишени при одном выстреле равна *0,6*. Стрельба ведется до первого попадания. Найти вероятность того, что будет сделано
   а) более четырех выстрелов;
   б) менее четырех выстрелов.
3) В первой коробке *3* синих и *3* красных карандаша, во второй – *2* синих и *4* красных карандаша, в третьей – *4* синих и *2* красных карандаша. Из наугад выбранной

коробки берут *2* карандаша. Они оказались разных цветов. Определить вероятность того, что карандаши взяты из третьей коробки.

4) Найти наивероятнейшее число появлений шестерки при *6* подбрасываниях игрального кубика и соответствующую вероятность.

Ответы:

Вариант №1. 1) $\mathbf{P}(A)=0{,}15$, $\mathbf{P}(B)=0{,}916$; 2) $\mathbf{P}(A)=0{,}38$, $\mathbf{P}(B)=0{,}94$; 3) $\mathbf{P}(A)=0{,}917$; 4) $\mathbf{P}(A)=0{,}984$.

Вариант №2. 1) $\mathbf{P}(A)=0{,}262$, $\mathbf{P}(B)=0{,}476$; 2) $\mathbf{P}(A)=0{,}026$, $\mathbf{P}(B)=0{,}936$; 3) $\mathbf{P}(A)=0{,}556$; 4) $k_0=1$, $\mathbf{P}(A)=0{,}402$.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Чудесенко В.Ф. Сборник заданий по специальным курсам высшей математики. Типовые расчеты: Учеб. пособие. — С-Пб.:Лань, 2005, — 124 с.
2. Кремер Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика: Ученик для вузов. — 2-е изд., перераб. и доп. — М.:ЮНИТИ-ДАНА, 2004, — 573 с.
3. Сборник задач по высшей математике. 2 курс: Учеб. пособие для вузов/Под ред. С.Н.Федина. — М.:Айрис-пресс, 2004. — 592 с.
4. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. — М.:Высшая школа, 1998, — 218 с.
5. Аджемян Л.В., Пиржуков И.Я., Чумаков С.И. Теория вероятностей. Вероятности событий: Методические указания / ЛТИ. — Л.,1992, — 48 с.
6. Комаров Л.Б. Теория вероятностей. Вероятности событий: Методические указания / ЛТИ. — Л., 1986. — 42 с.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Кафедра прикладной математики

Учебное пособие

**Примеры решения задач по теории вероятностей.**
**Случайные события**

Марина Владимировна Лукина
Екатерина Воиславовна Милованович

Отпечатано с оригинал-макета. Формат $60 \times 90 . \, ^1/_{16}$
Печ.л. 3,5. Тираж 500 экз. Заказ №

Санкт-Петербургский государственный технологический институт
(Технический Университет). ИК «Синтез»

190013 Санкт-Петербург, Московский пр., 26